Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

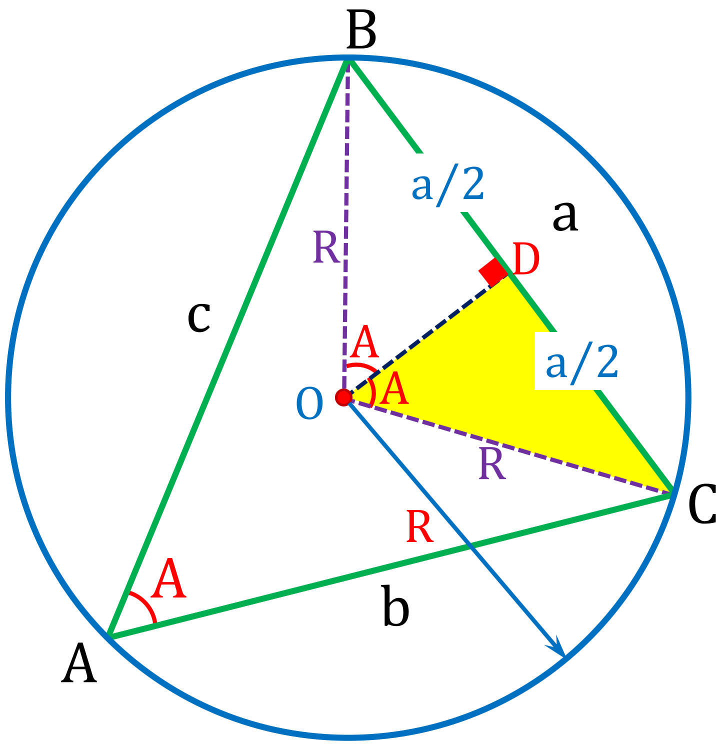
TRIGONOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Teorema de los Senos (Ley de Senos)



Demostración:

En el ⊿CDO:

$$\text{SenA} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \longrightarrow 2R = \frac{a}{\text{SenA}}$$

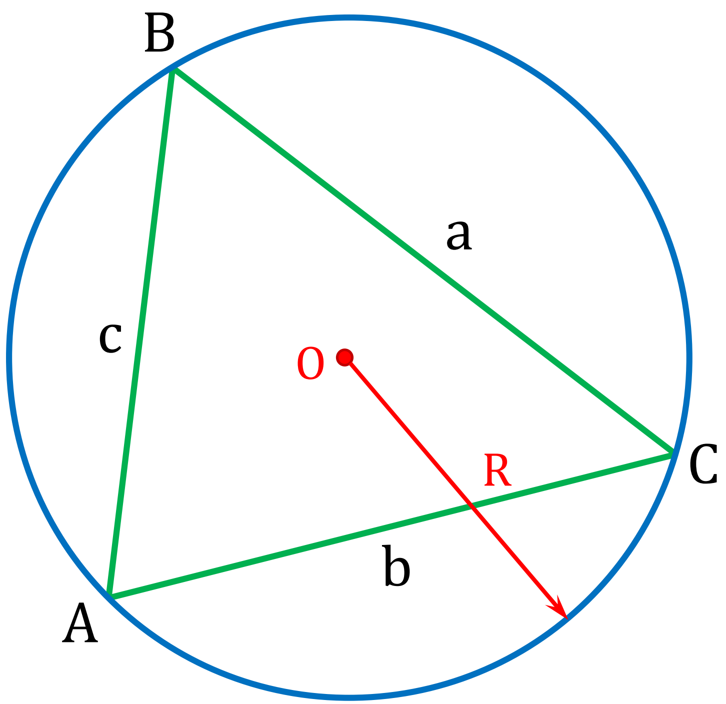
Bajo procedimientos similares, obtendremos los siguientes resultados.

$$2R = \frac{b}{\text{SenB}} \qquad 2R = \frac{c}{\text{SenC}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}} = \frac{b}{\text{SenB}} = \frac{c}{\text{SenC}} = 2R}$$

Teorema de los Senos (Ley de Senos)



$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} = 2R$$

También:

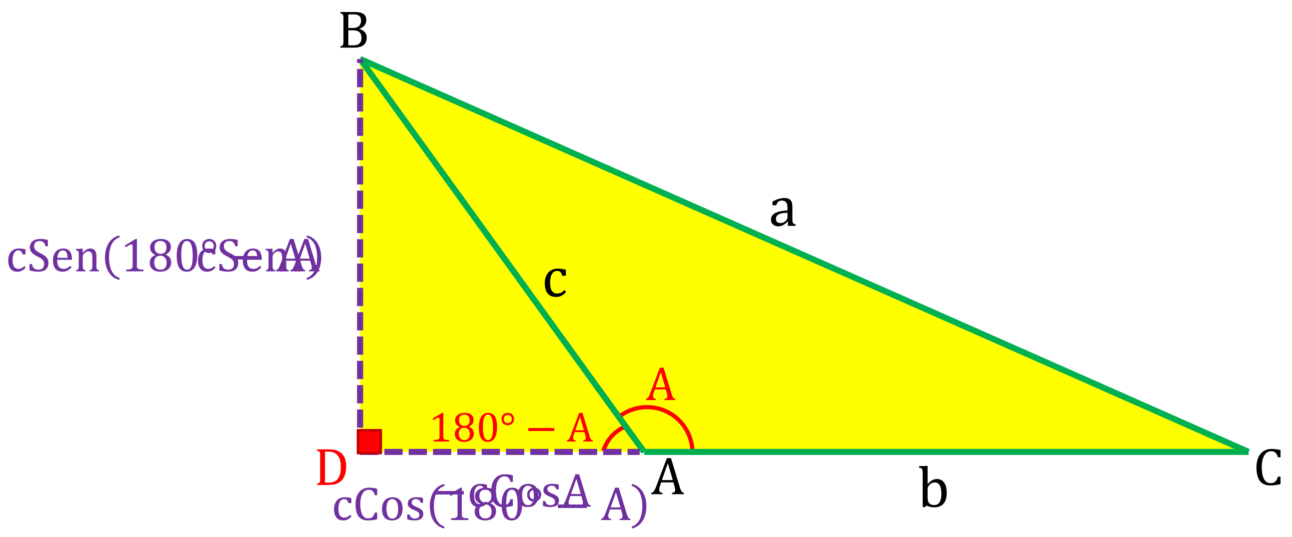
$$a = 2RSenA$$

$$b = 2RSenB$$

$$c = 2RSenC$$

Observación: Se utiliza cuando se tiene 2 lados y 2 ángulos incluyendo la incónita.

Teorema de los Cosenos (Ley de Cosenos)



***Demostración*:**

Por el Teorema de Pitágoras: En el $\triangle BDC$

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

$$a^2 = (cSenA)^2 + (b - cCosA)^2$$

$$a^2 = c^2Sen^2A + b^2 - 2bcCosA + c^2Cos^2A$$

$$a^2 = c^2\underbrace{(Sen^2A + Cos^2A)}_{1} + b^2 - 2bcCosA$$

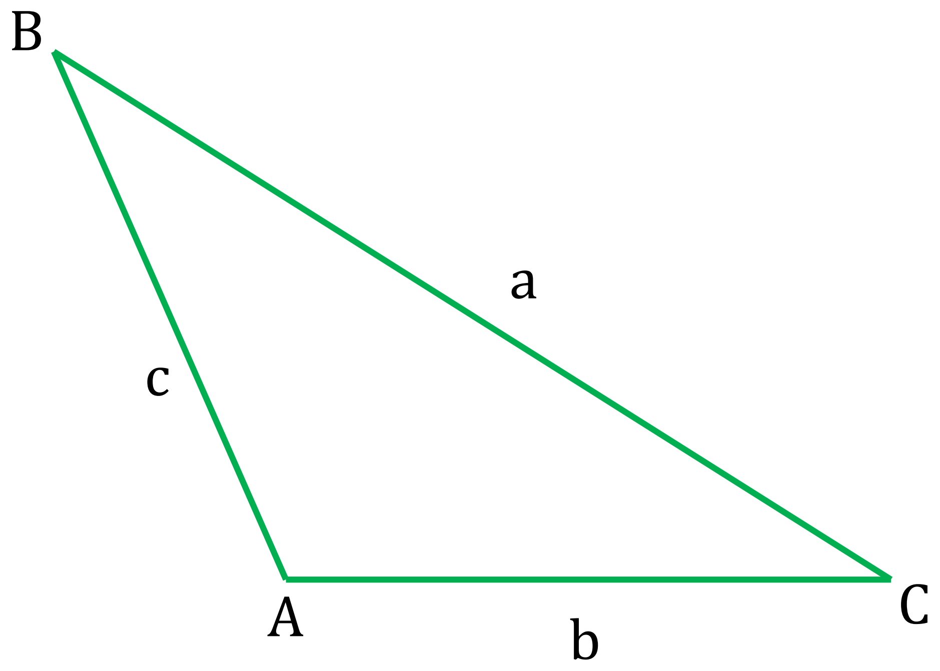
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA}$$

Bajo procedimientos similares, obtendremos los siguientes resultados.

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB}$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC}$$

Teorema de los Cosenos (Ley de Cosenos)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

También:

$$CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$CosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$CosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Observación: Se utiliza cuando se tiene 3 lados y 1 ángulo incluyendo la incónita.

Teorema de Tangentes (Ley de Tangentes)

Demostración:

De la Ley de Senos:

$$\frac{a}{\operatorname{Sen}A}=\frac{b}{\operatorname{Sen}B} \longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{\operatorname{Sen}A}{\operatorname{Sen}B}$$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{Sen}A-\operatorname{Sen}B}{\operatorname{Sen}A+\operatorname{Sen}B}$$

Por Transformaciones Trigonométricas:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\cancel{2}\operatorname{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cancel{2}\operatorname{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{Cot}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

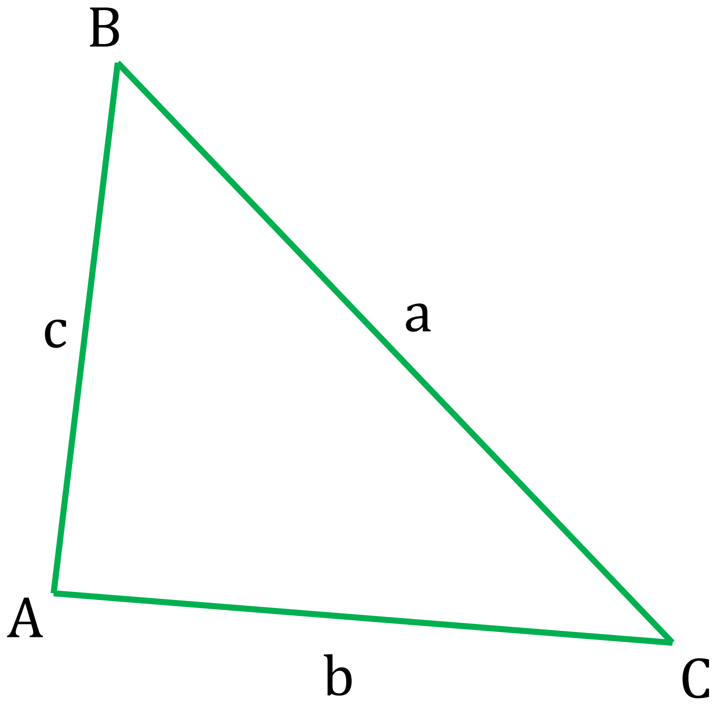
$$\therefore\ \mathbf{\frac{a-b}{a+b}=\frac{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}}$$

Bajo procedimientos similares, obtendremos los siguientes resultados.

$$\mathbf{\frac{a-c}{a+c}=\frac{Tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}}$$

$$\mathbf{\frac{b-c}{b+c}=\frac{Tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{Tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}}$$

Teorema de Tangentes (Ley de Tangentes)



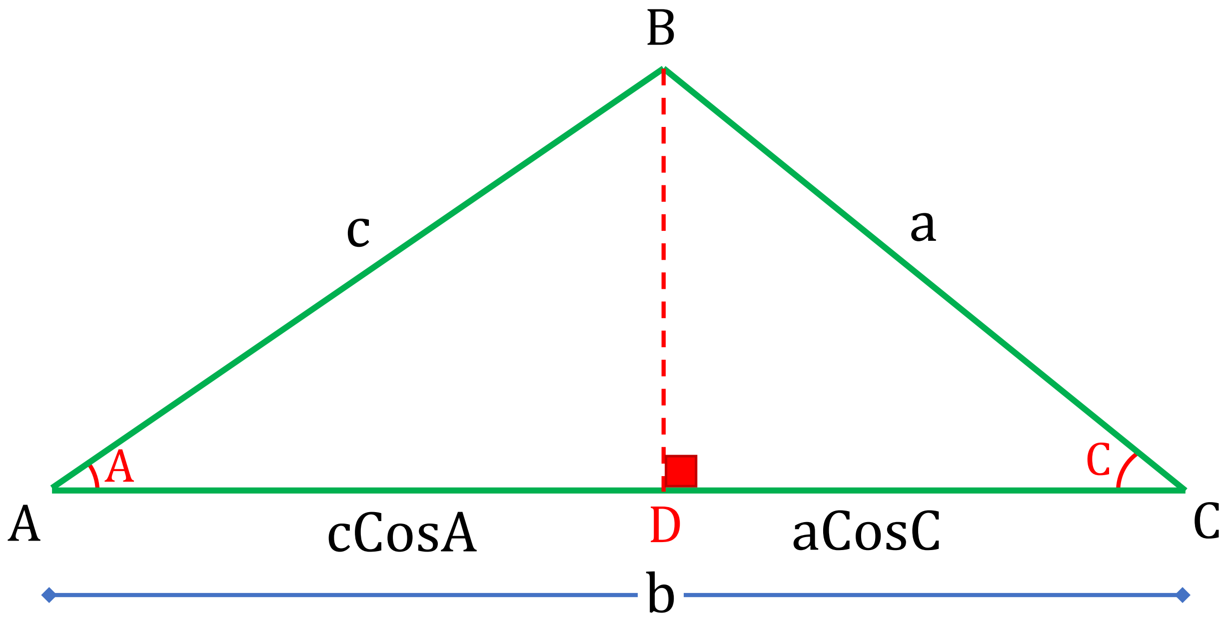
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\operatorname{Tan}\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\operatorname{Tan}\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

Observación: Se utiliza cuando se tiene 2 lados y 2 ángulos incluyendo la incónita.

Teorema de las Proyecciones (Ley de las Proyecciones)



***Demostración*:**

Tenemos:

$$AC = AD + DC$$

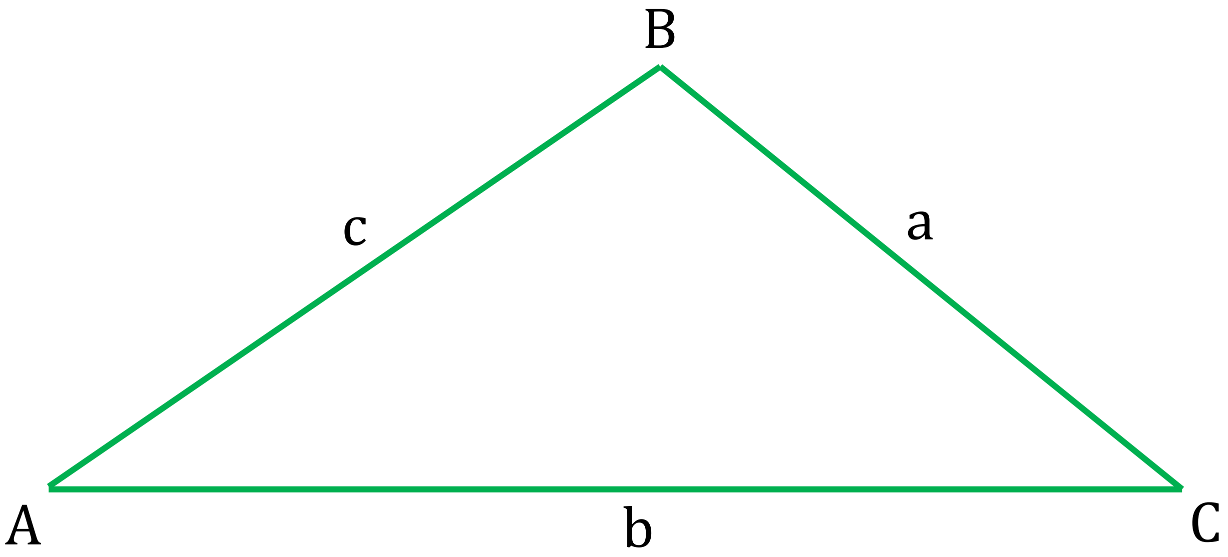
$$\mathbf{b = cCosA + aCosC}$$

Bajo procedimientos similares, obtendremos los siguientes resultados.

$$\mathbf{a = bCosC + cCosB}$$

$$\mathbf{c = aCosB + bCosA}$$

Teorema de las Proyecciones (Ley de las Proyecciones)



$$a = b\text{Cos}C + c\text{Cos}B$$

$$b = a\text{Cos}C + c\text{Cos}A$$

$$c = a\text{Cos}B + b\text{Cos}A$$

Razones Trigonométricas del Semiángulo de un Triángulo en términos de sus lados

En un Δ ABC, todo ángulo interior A debe verificar $0<A<180°$, entonces $0<\frac{A}{2}<90°$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{CosA}}{2}}$$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}}$$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

Si: $2p=a+b+c$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc}}$$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{2(p-c)2(p-b)}{4bc}}$$

$$\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}$$

Razones Trigonométricas del Semiángulo de un Triángulo en términos de sus lados

En un Δ ABC, todo ángulo interior A debe verificar $0<A<180°$, entonces $0<\frac{A}{2}<90°$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}A}{2}}$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(b^2+c^2+2bc)-a^2}{4bc}}$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

Si: $2p=a+b+c$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(2p)(2p-2a)}{4bc}}$$

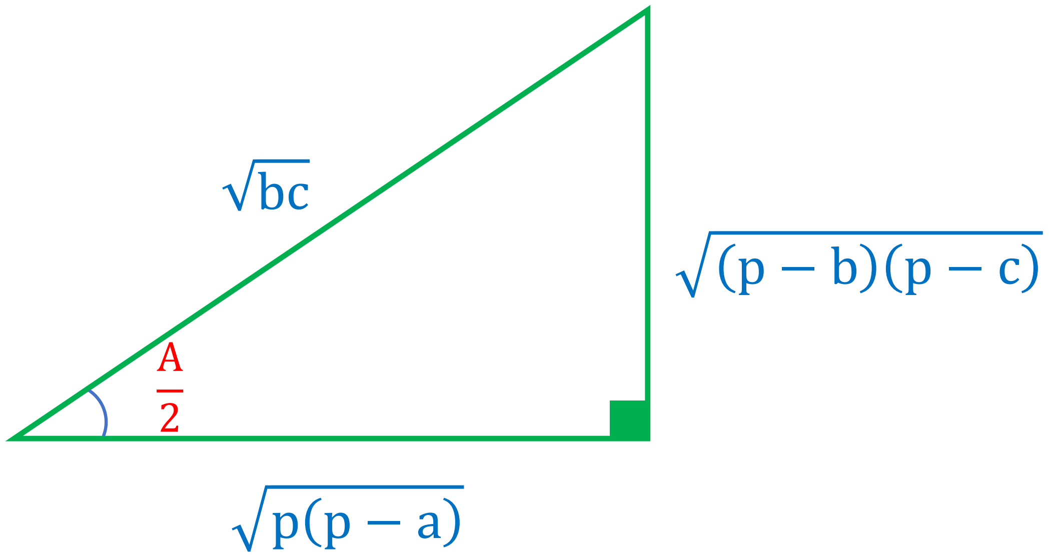
$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{2p\times 2(p-a)}{4bc}}$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Razones Trigonométricas del Semiángulo de un Triángulo en términos de sus lados

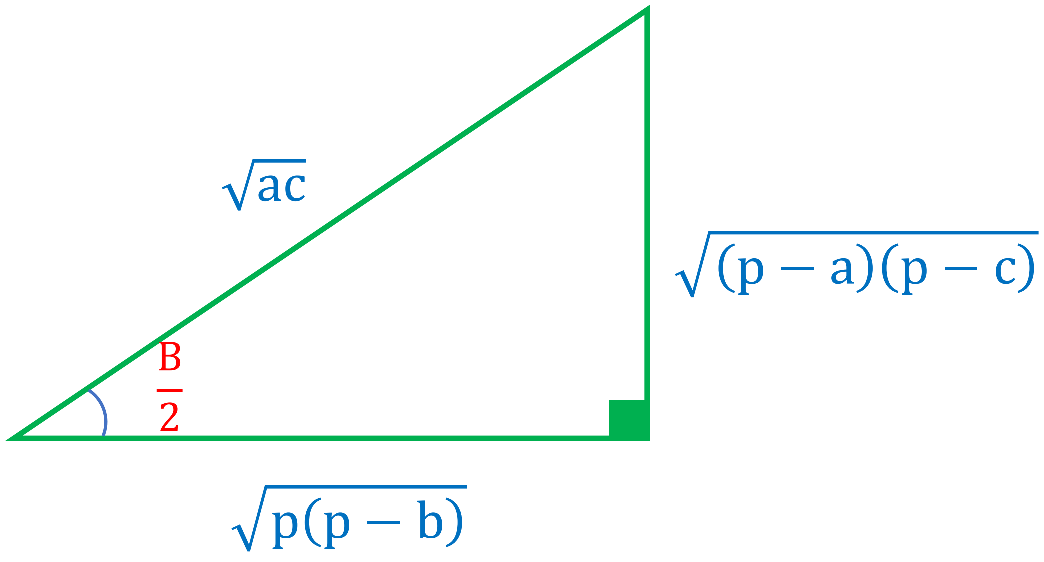
$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{Sen}\left(\frac{A}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\
\operatorname{Cos}\left(\frac{A}{2}\right) &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\
\operatorname{Tan}\left(\frac{A}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}
\end{aligned}\right\}$$



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

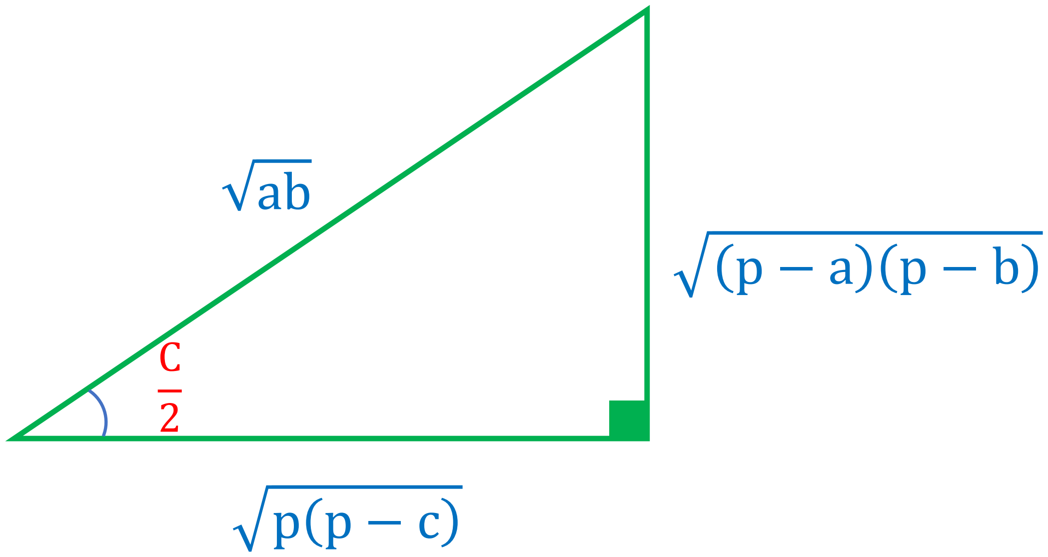
Razones Trigonométricas del Semiángulo de un Triángulo en términos de sus lados

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{Sen}\left(\frac{B}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\[2ex]
\operatorname{Cos}\left(\frac{B}{2}\right) &= \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\[2ex]
\operatorname{Tan}\left(\frac{B}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}
\end{aligned}\right\}$$



Razones Trigonométricas del Semiángulo de un Triángulo en términos de sus lados

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{Sen}\left(\frac{C}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \\
\operatorname{Cos}\left(\frac{C}{2}\right) &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \\
\operatorname{Tan}\left(\frac{C}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}
\end{aligned}\right\}$$



Semiperímetro de un Triángulo en función de los semiángulos y el circunradio

$$2p = a + b + c$$

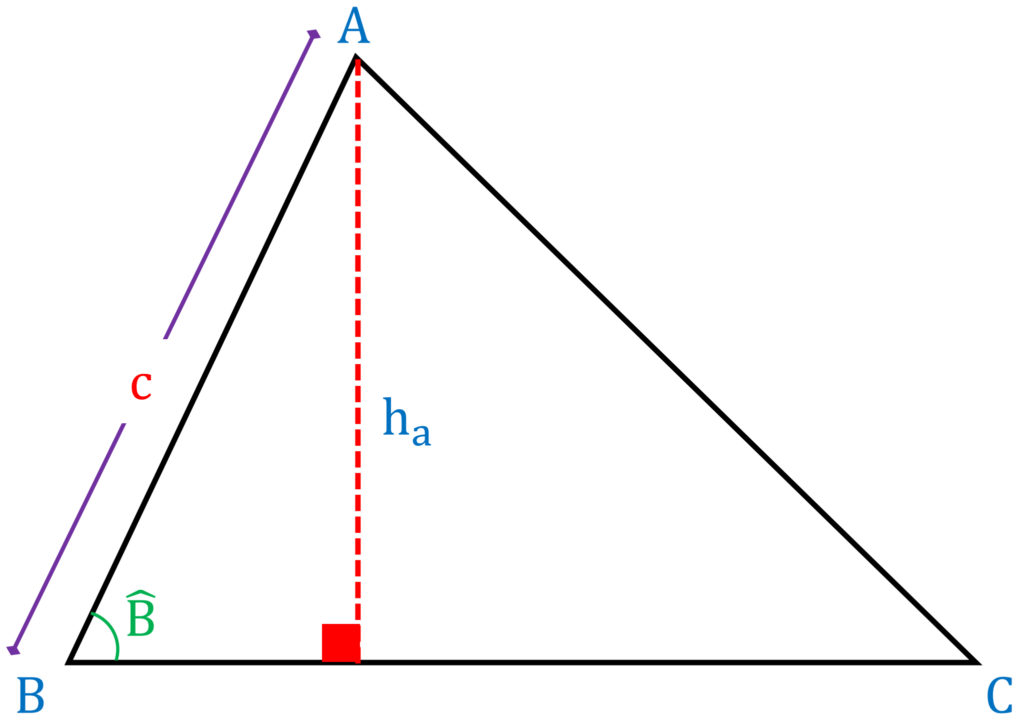
$$2p = 2RSenA + 2RSenB + 2RSenC$$

$$2p = 2R(SenA + SenB + SenC)$$

$$p = R \times 4Cos\left(\frac{A}{2}\right)Cos\left(\frac{B}{2}\right)Cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbf{p = 4RCos\left(\frac{A}{2}\right)Cos\left(\frac{B}{2}\right)Cos\left(\frac{C}{2}\right)}}$$

Altura (h)



$$h_a = c\text{Sen}B \begin{cases} \text{Si: } c = 2R\text{sen}C \rightarrow h_a = 2R\text{Sen}B\text{Sen}C \\ \text{Si: } \text{sen}B = \dfrac{b}{2R} \rightarrow h_a = \dfrac{bc}{2R} \end{cases}$$

Altura (h)

$$h_a = 2RSenBSenC$$

$$h_a = \frac{bc}{2R}$$

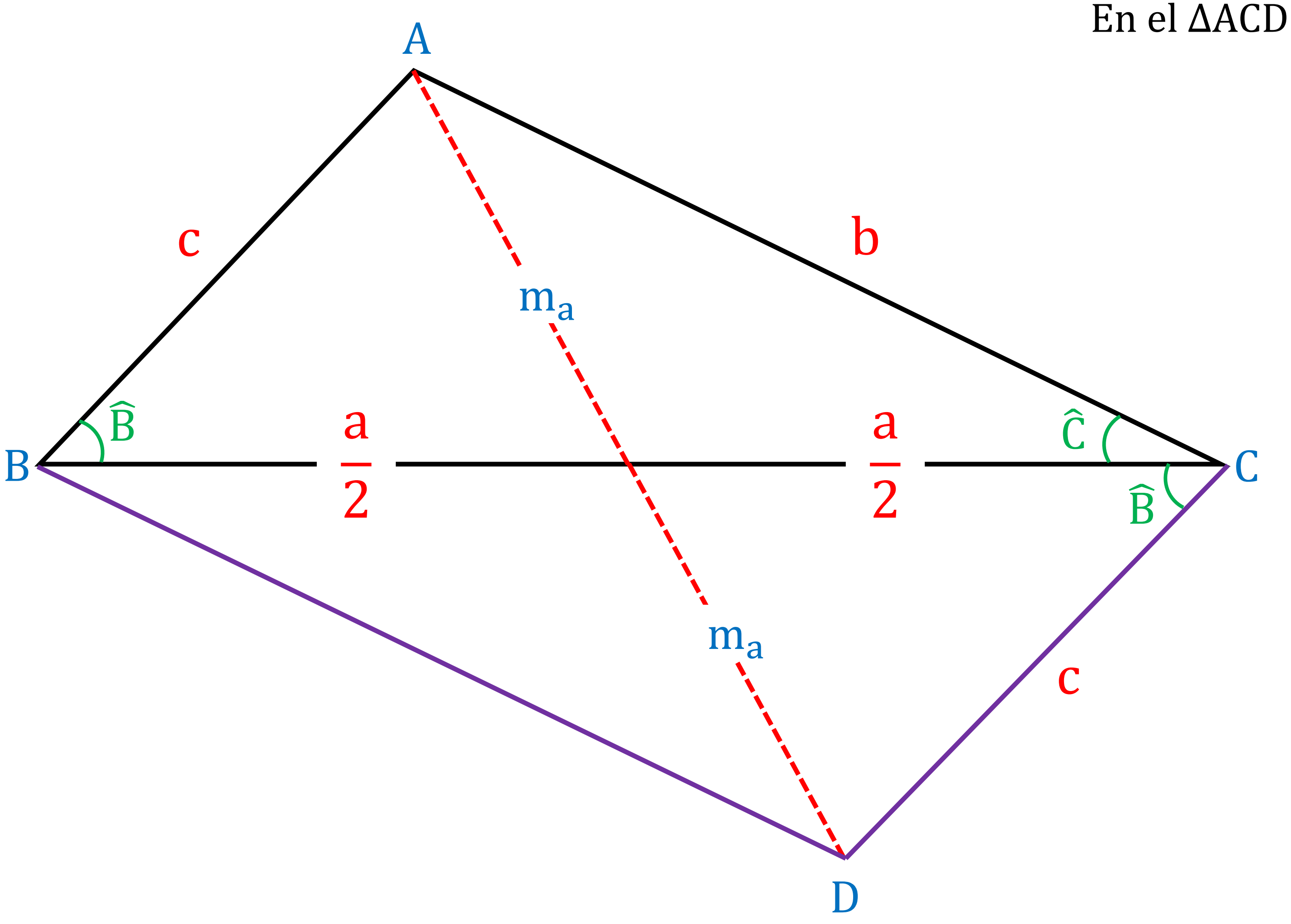
$$h_b = 2RSenASenC$$

$$h_b = \frac{ac}{2R}$$

$$h_c = 2RSenASenB$$

$$h_c = \frac{ab}{2R}$$

Mediana (m)



En el ΔACD: Teorema de Cosenos

$$(2m_a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\mathrm{Cos}(B + C)$$

$$4m^2{}_a = b^2 + c^2 - 2bc\,(-\mathrm{Cos}A)$$

$$4m^2{}_a = b^2 + c^2 + 2bc\,.\,\mathrm{Cos}A$$

Por el teorema de Cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\,\mathrm{Cos}A$$

$+$: $4m^2{}_a + a^2 = 2(b^2 + c^2)$

$-$: $4m^2{}_a - a^2 = 4bc\,.\,\mathrm{Cos}A$

Mediana (m)

$$4m^2{}_a = b^2 + c^2 + 2bc\,.\,\text{CosA}$$

$$4m^2{}_b = a^2 + c^2 + 2ac\,.\,\text{CosB}$$

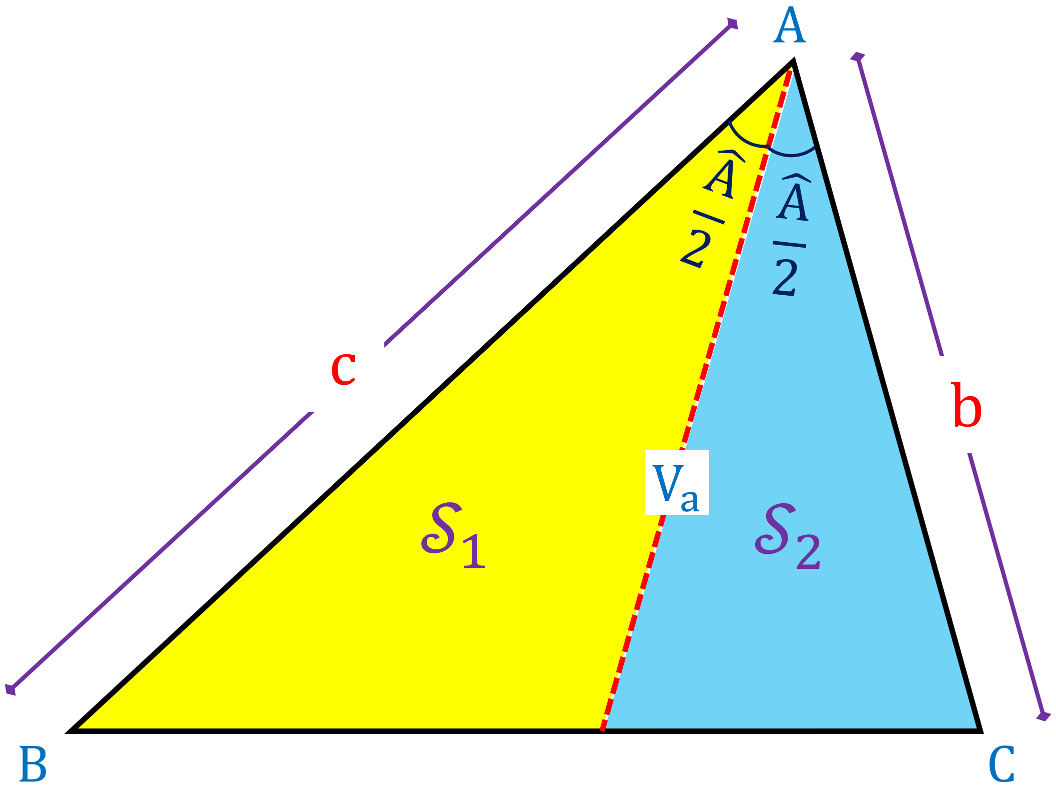
$$4m^2{}_c = a^2 + b^2 + 2ab\,.\,\text{CosC}$$

$$m^2{}_a = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m^2{}_b = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

$$m^2{}_c = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

Bisectriz Interior (V)



$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{\Delta ABC}$$

$$\frac{c.V_a}{2} \times \text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{V_a.b}{2} \times \text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{bc}{2} \times \text{SenA}$$

$$V_a\cancel{\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)}\left(\frac{b}{\cancel{2}} + \frac{c}{\cancel{2}}\right) = \frac{bc}{\cancel{2}} \times 2\cancel{\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)}\text{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$V_a = \frac{2bc}{(b+c)}\text{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)$$

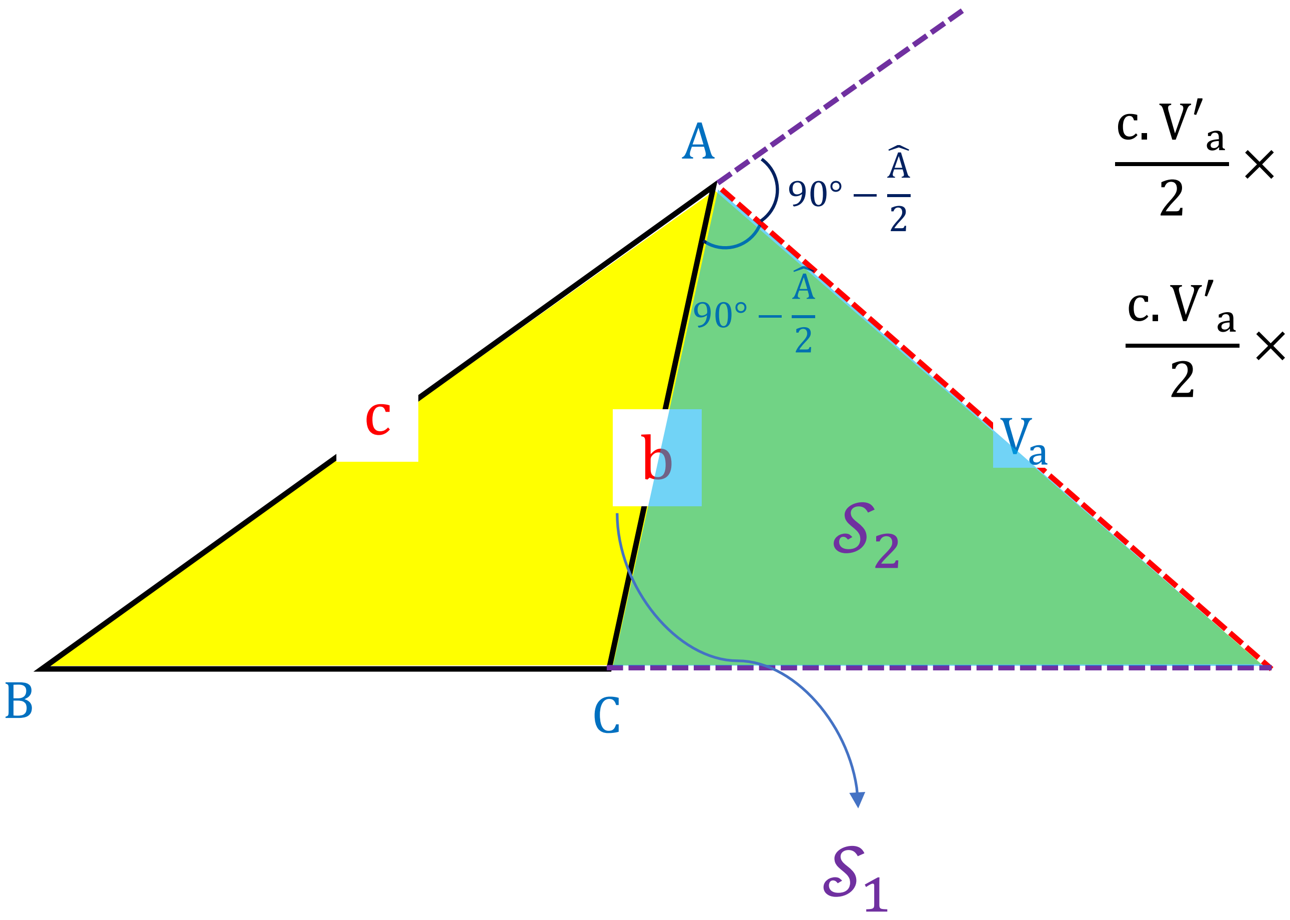
Bisectriz Interior (V)

$$V_a = \frac{2bc}{(b+c)} \operatorname{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$V_b = \frac{2ac}{(a+c)} \operatorname{Cos}\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$V_c = \frac{2ab}{(a+b)} \operatorname{Cos}\left(\frac{C}{2}\right)$$

Bisectriz Exterior (V’)



$$\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{\Delta ABC}$$

$$\frac{c.V'_a}{2} \times \mathrm{Sen}\left(90° + \frac{A}{2}\right) - \frac{b.V'_a}{2} \times \mathrm{Sen}\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \frac{bc}{2} \times \mathrm{SenA}$$

$$\frac{c.V'_a}{2} \times \mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right) - \frac{b.V'_a}{2} \times \mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{bc}{2} \times 2\mathrm{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$V'_a\cancel{\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)}\left(\frac{c}{\cancel{2}} - \frac{b}{\cancel{2}}\right) = \frac{bc}{\cancel{2}} \times 2\mathrm{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cancel{\mathrm{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$V'_a = \frac{2bc}{(c-b)}\mathrm{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)$$

Si: $c > b$

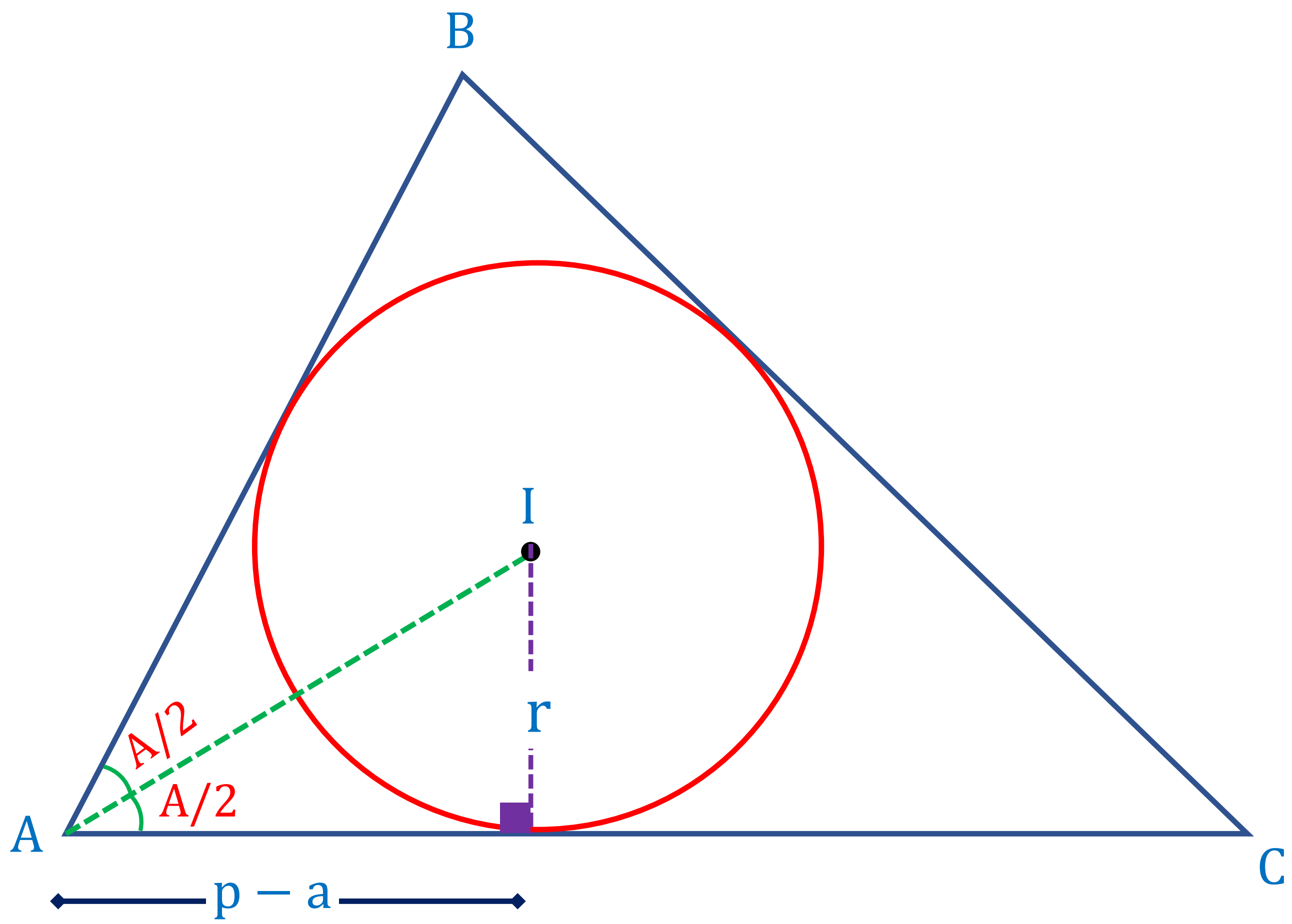
Bisectriz Exterior (V’)

$$V'_a = \frac{2bc}{|b-c|}\text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$V'_b = \frac{2ac}{|a-c|}\text{Sen}\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$V'_c = \frac{2ab}{|a-b|}\text{Sen}\left(\frac{C}{2}\right)$$

Inradio (r)

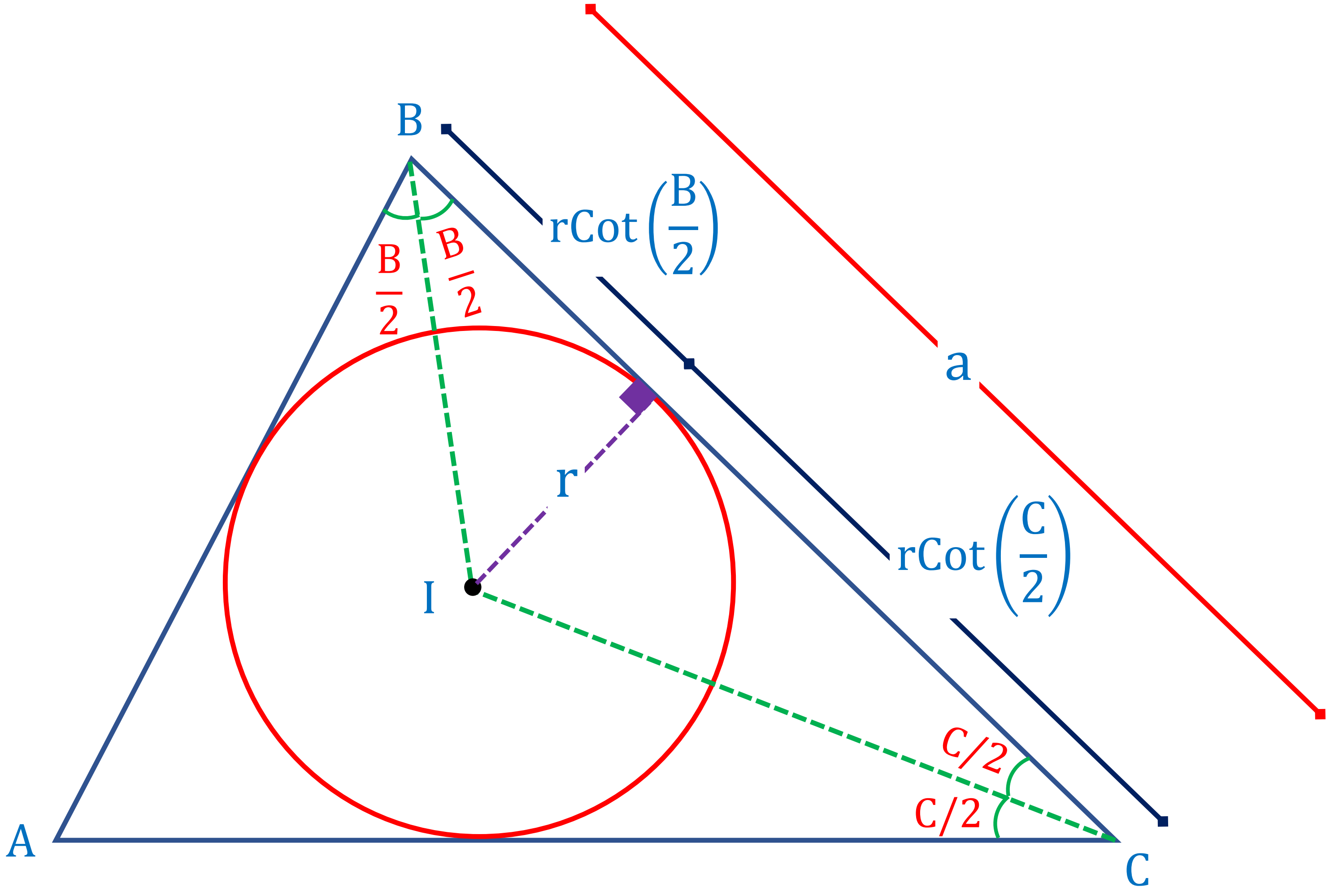


$$r = (p - a)\text{Tan}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$r = (p - b)\text{Tan}\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$r = (p - c)\text{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)$$

Inradio (r)



$$rCot\left(\frac{B}{2}\right) + rCot\left(\frac{C}{2}\right) = a$$

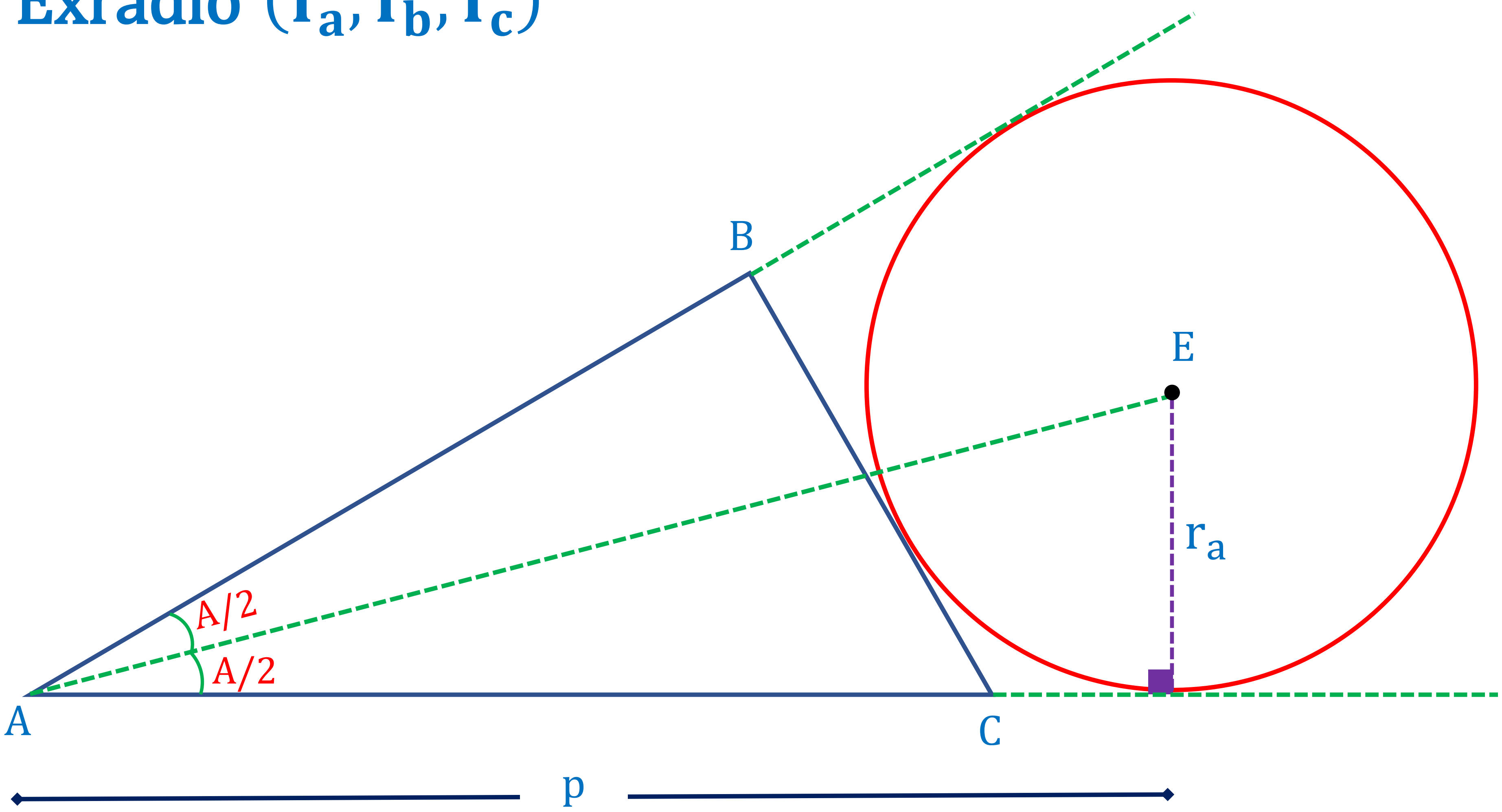
$$r\left[Cot\left(\frac{B}{2}\right) + Cot\left(\frac{C}{2}\right)\right] = a$$

$$r\left[\frac{Sen\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2}}\right] = 2RSenA$$

$$\frac{rCos\cancel{\frac{A}{2}}}{Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2}} = 2R\left(2Sen\frac{A}{2}\cancel{Cos\frac{A}{2}}\right)$$

$$\therefore \mathbf{r = 4RSen\frac{A}{2}Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2}}$$

Exradio (r_a, r_b, r_c)



$$r_a = p\mathrm{Tan}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$r_b = p\mathrm{Tan}\left(\frac{B}{2}\right)$$

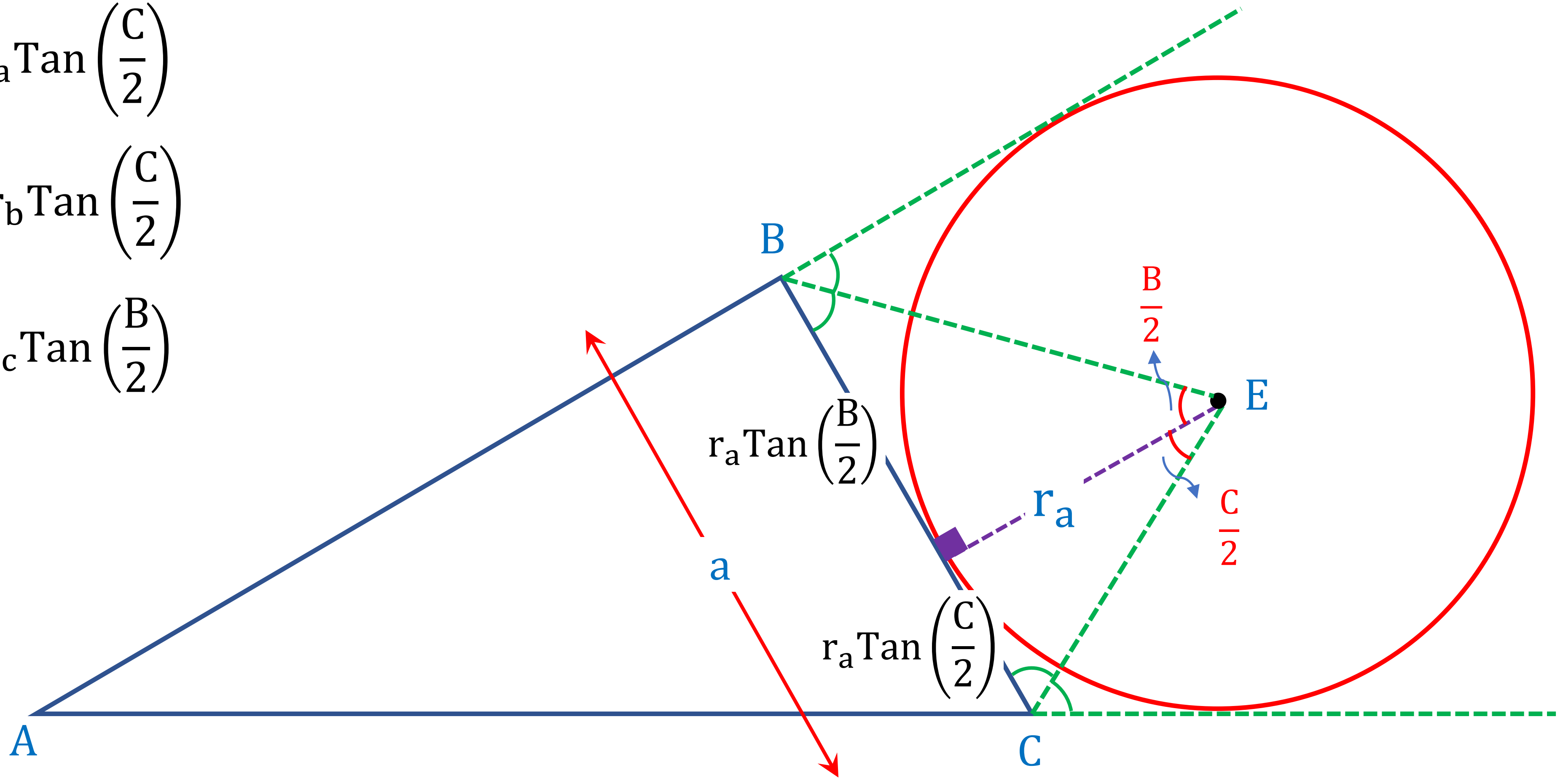
$$r_c = p\mathrm{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)$$

Exradio (r_a, r_b, r_c)

$$a = r_a \mathrm{Tan}\left(\frac{B}{2}\right) + r_a \mathrm{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$b = r_b \mathrm{Tan}\left(\frac{A}{2}\right) + r_b \mathrm{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$c = r_c \mathrm{Tan}\left(\frac{A}{2}\right) + r_c \mathrm{Tan}\left(\frac{B}{2}\right)$$



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Exradio (r_a, r_b, r_c)

$$r_a\mathrm{Tan}\left(\frac{B}{2}\right)+r_a\mathrm{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)=a$$

$$r_a\left[\mathrm{Tan}\left(\frac{B}{2}\right)+\mathrm{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)\right]=a$$

$$r_a\left[\frac{\mathrm{Sen}\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}\right]=2R\mathrm{Sen}A$$

$$\frac{r_a\cancel{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}}}{\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}=2R\left(2\mathrm{Sen}\frac{A}{2}\cancel{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ r_a=4R\mathrm{Sen}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}$$

$$r_b\mathrm{Tan}\left(\frac{A}{2}\right)+r_b\mathrm{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)=b$$

$$r_b\left[\mathrm{Tan}\left(\frac{A}{2}\right)+\mathrm{Tan}\left(\frac{C}{2}\right)\right]=b$$

$$r_b\left[\frac{\mathrm{Sen}\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}\right]=2R\mathrm{Sen}B$$

$$\frac{r_b\cancel{\mathrm{Cos}\frac{B}{2}}}{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}=2R\left(2\mathrm{Sen}\frac{B}{2}\cancel{\mathrm{Cos}\frac{B}{2}}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ r_b=4R\mathrm{Sen}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}$$

$$r_c\mathrm{Tan}\left(\frac{A}{2}\right)+r_c\mathrm{Tan}\left(\frac{B}{2}\right)=c$$

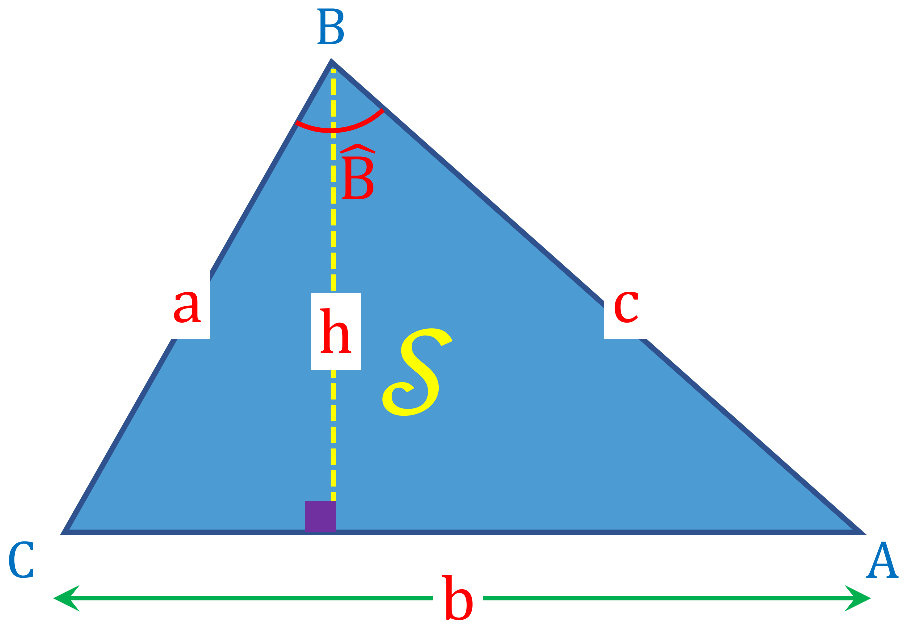
$$r_c\left[\mathrm{Tan}\left(\frac{A}{2}\right)+\mathrm{Tan}\left(\frac{B}{2}\right)\right]=c$$

$$r_c\left[\frac{\mathrm{Sen}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}}\right]=2R\mathrm{Sen}C$$

$$\frac{r_c\cancel{\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}}{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}}=2R\left(2\mathrm{Sen}\frac{C}{2}\cancel{\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ r_c=4R\mathrm{Sen}\frac{C}{2}\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}}$$

Área de una Región Triangular (S)



$$\mathcal{S} = \frac{bh}{2}$$

$$\mathcal{S} = \frac{ac}{2} \times \text{SenB}$$

$$\mathcal{S} = \frac{abc}{4R}$$

$$\mathcal{S} = 2R^2\text{SenASenBSenC}$$

$$\mathcal{S} = pr$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Se sabe:

$$\left.\begin{aligned} &\blacktriangle\ p = 4R\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) \\ &\blacktriangle\ r = 4R\,\mathrm{Sen}\left(\frac{A}{2}\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{B}{2}\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{C}{2}\right) \end{aligned}\right\} \div$$

$$\frac{p}{r} = \cot\left(\frac{A}{2}\right)\cot\left(\frac{B}{2}\right)\cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\boxed{p = r\cot\left(\frac{A}{2}\right)\cot\left(\frac{B}{2}\right)\cot\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Como: $S = pr$

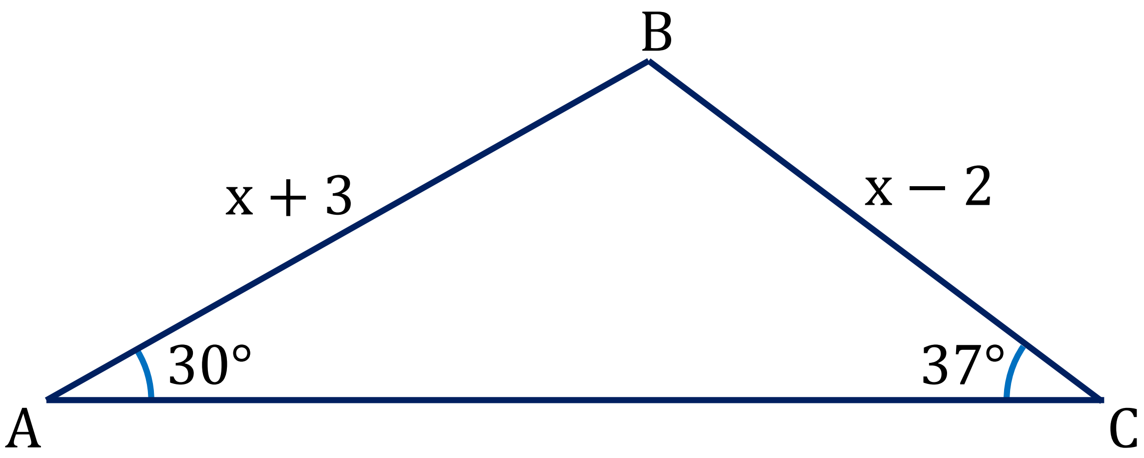
$$\boxed{S = r^2\cot\left(\frac{A}{2}\right)\cot\left(\frac{B}{2}\right)\cot\left(\frac{C}{2}\right)}$$

$$\boxed{S = p^2\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

1. En la figura, calcular BC.



Resolución:

Por el Teorema de Senos:

$$\frac{x+3}{\text{Sen}37°} = \frac{x-2}{\text{Sen}30°}$$

$$(x+3) \times \frac{1}{2} = (x-2) \times \frac{3}{5}$$

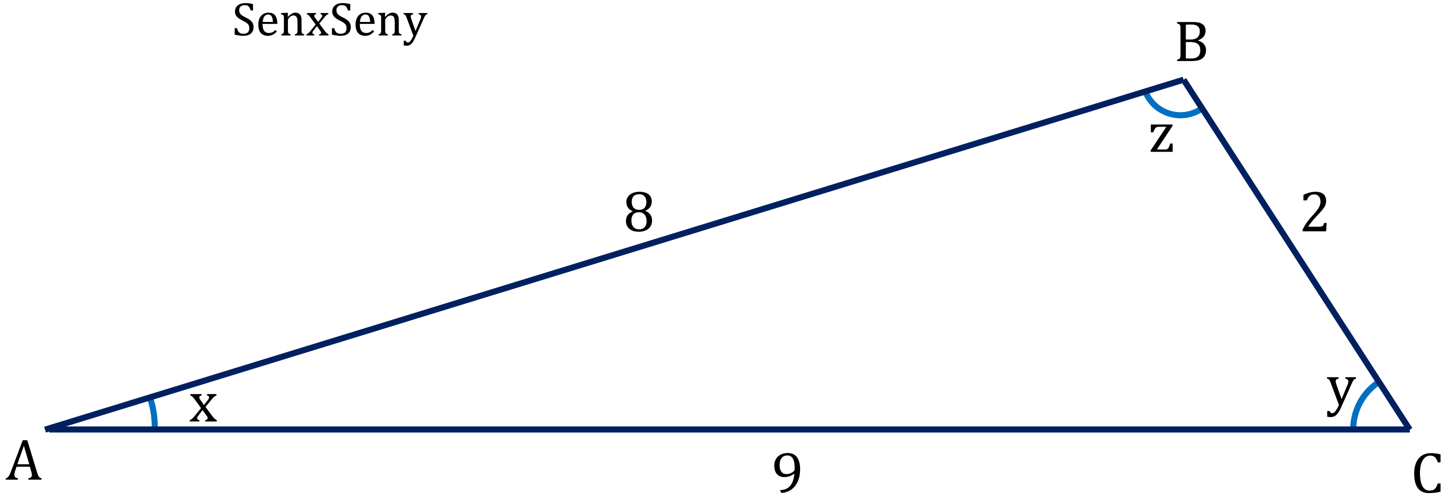
$$5x + 15 = 6x - 12$$

$$x = 27$$

$\therefore$ **BC = 25**

CLAVE: C

2. Calcular: $\dfrac{\mathrm{Sen}^2 z}{\mathrm{Sen}x\,\mathrm{Sen}y}$



Resolución:

$$\frac{2}{\mathrm{Sen}x} = \frac{8}{\mathrm{Sen}y} = \frac{9}{\mathrm{Sen}z} = k$$

$$\frac{2}{k} = \mathrm{Sen}x \qquad \frac{8}{k} = \mathrm{Sen}y \qquad \frac{9}{k} = \mathrm{Sen}z$$

Reemplazando:

$$\frac{\mathrm{Sen}^2 z}{\mathrm{Sen}x\,\mathrm{Sen}y}$$

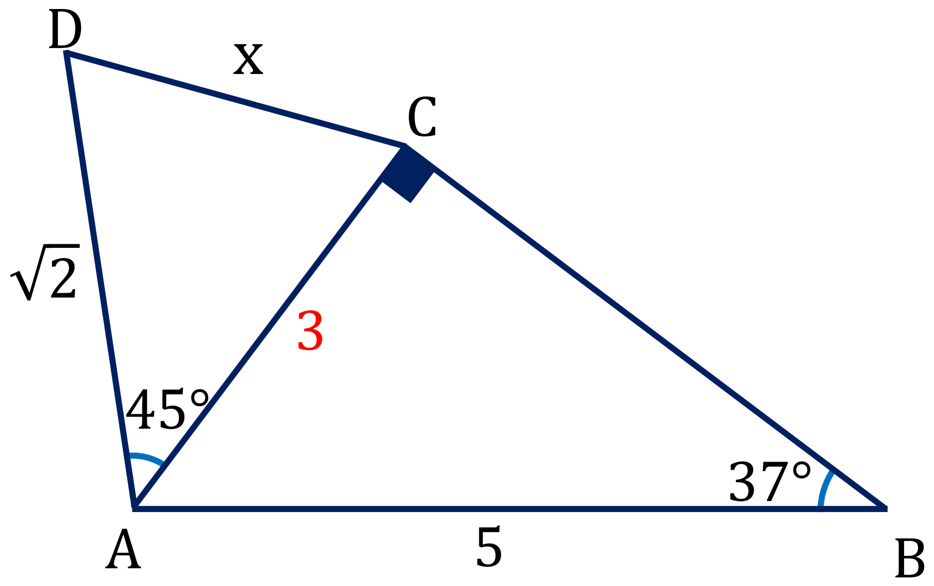
$$\frac{\left(\frac{9}{k}\right)^2}{\left(\frac{2}{k}\right) \times \left(\frac{8}{k}\right)}$$

$$\frac{\frac{81}{\cancel{k^2}}}{\frac{16}{\cancel{k^2}}}$$

$$\frac{81}{16}$$

CLAVE: E

3. En la figura, calcular "x"



Resolución:

En el ΔDAC(Por el Teorema de Cosenos)

$$x^2 = (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2(\sqrt{2})(3)\text{Cos}45°$$

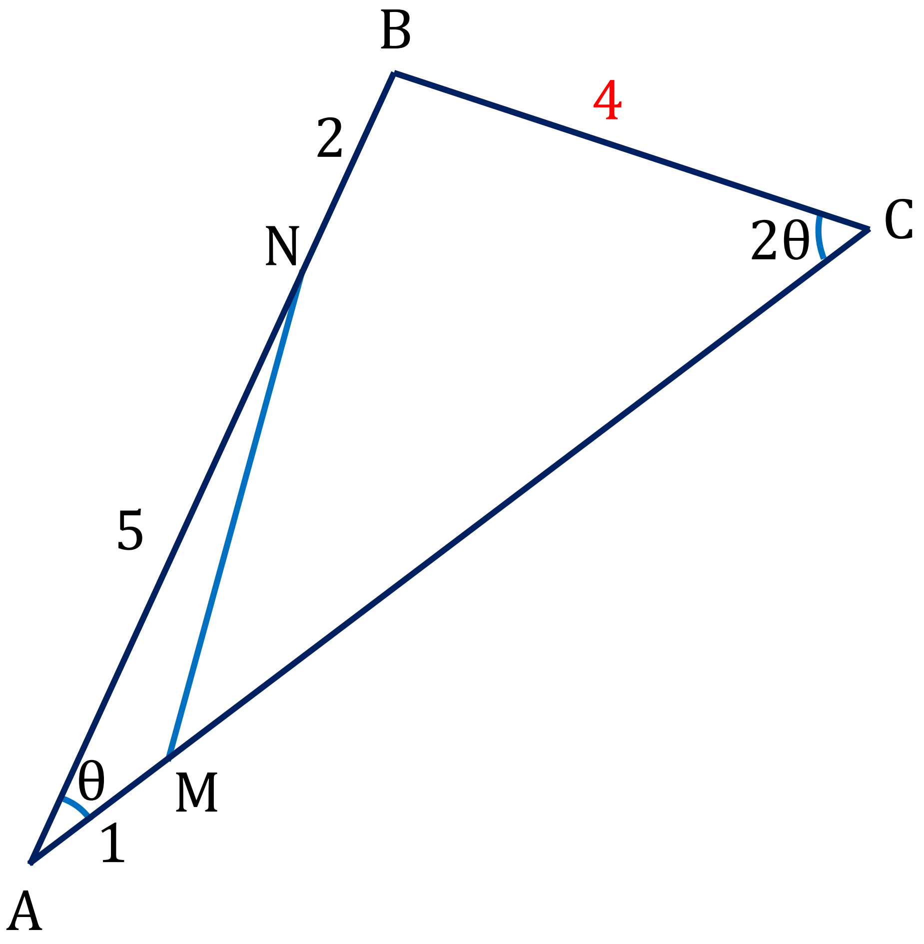
$$x^2 = 11 - 6(\cancel{\sqrt{2}}) \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$x^2 = 5$$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{5}}$$

CLAVE: C

4. De la figura, halle $\overline{MN}$



Resolución:

En el ΔABC(Teorema de Senos)

$$\frac{4}{\text{Sen}\theta} = \frac{7}{\text{Sen}2\theta}$$

$$4 \times 2\cancel{\text{Sen}\theta}\text{Cos}\theta = 7\cancel{\text{Sen}\theta}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{7}{8}$$

En el ΔNAM(Teorema de Cosenos)

$$(\overline{MN})^2 = 5^2 + 1^2 - 2(5)(1)\text{Cos}\theta$$

$$(\overline{MN})^2 = 26 - \cancel{10} \times \frac{7}{\cancel{8}}$$

$$(\overline{MN})^2 = \frac{69}{4}$$

$$\therefore \overline{\mathbf{MN}} = \frac{\sqrt{\mathbf{69}}}{\mathbf{2}}$$

CLAVE: B

5. En un triángulo ABC, se cumple: $A + B = 74°$ y $A - B = 53°$ Calcular: $\dfrac{a+b}{a-b}$

Resolución:

Por el Teorema de Tangentes:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{53°}{2}\right)}{\operatorname{Tan}\left(\frac{74°}{2}\right)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{4}}}$$

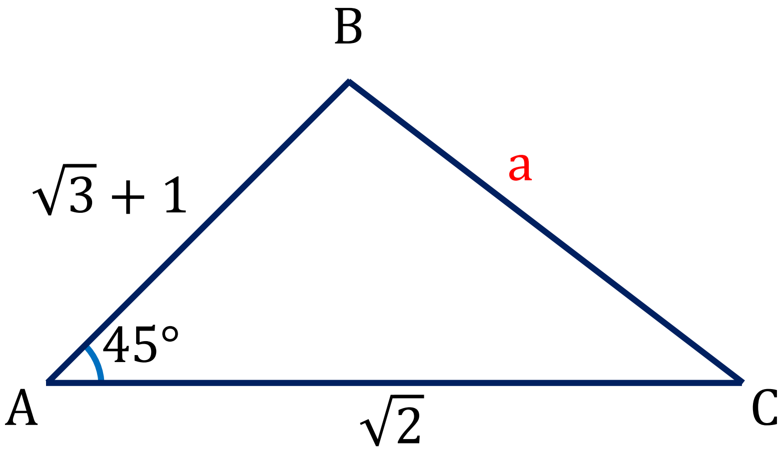
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{a-b}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

CLAVE: B

6. Si: $b = \sqrt{2}$; $c = \sqrt{3} + 1$; $A = 45°$ son valores de dos lados y un ángulo interior del triángulo ABC, calcule la longitud del lado “a”

Resolución:



$$a^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2})\text{Cos}45°$$

$$a^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2 - 2(\sqrt{3} + 1)(\cancel{\sqrt{2}}) \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

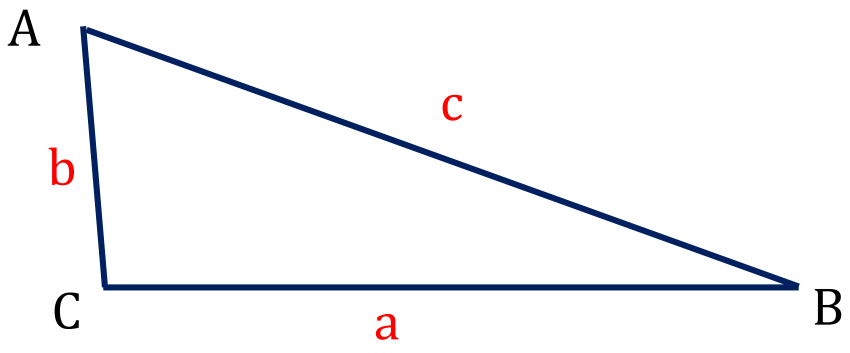
$$a^2 = 6 + \cancel{2\sqrt{3}} - \cancel{2\sqrt{3}} - 2$$

$\therefore$ **a = 2**

CLAVE: C

7. Calcule C, en un triángulo ABC, si $a = 3b$ además $\operatorname{Cot}\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2$

Resolución:



$$\operatorname{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Por el Teorema de Tangentes:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{3b-b}{3b+b} = \frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{2\cancel{b}}{4\cancel{b}} = \frac{\frac{1}{2}}{\operatorname{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\operatorname{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right) = 1$$

$$\frac{A+B}{2} = 45^\circ$$

$$A + B = 90^\circ$$

$\therefore$ **C = 90°**

CLAVE: B

8. En un triángulo ABC, simplifique: $M=\left(\frac{aCosA+bCosB}{RSenC}\right)Sec(B-A)$

Siendo R: circunradio de ΔABC

Resolución:

$$M=\left(\frac{aCosA+bCosB}{RSenC}\right)Sec(B-A)$$

$$M=\left(\frac{2\cancel{R}SenACosA+2\cancel{R}SenBCosB}{\cancel{R}SenC}\right)Sec(B-A)$$

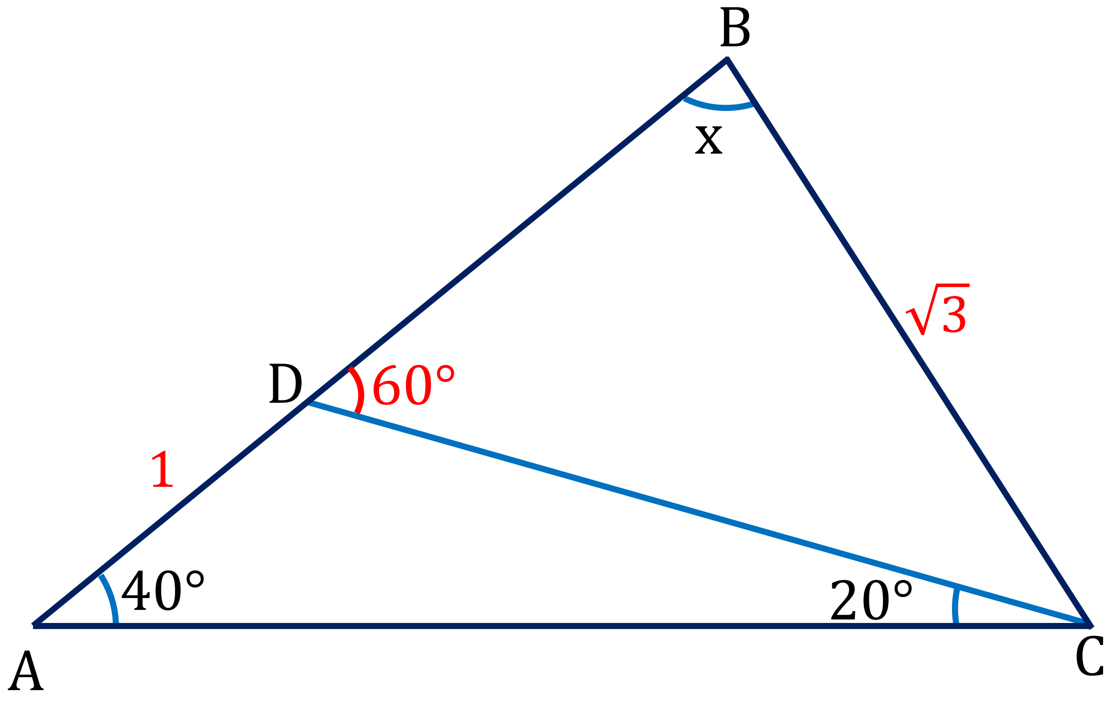
$$M=\left(\frac{Sen2A+Sen2B}{SenC}\right)Sec(A-B)$$

$$M=\left(\frac{2\cancel{Sen(A+B)}\cancel{Cos(A-B)}}{\cancel{SenC}}\right)\frac{1}{\cancel{Cos(A-B)}}$$

$\therefore$ **$M=2$**

CLAVE: A

9. Calcule x, si $BC = \sqrt{3}(AD)$



Resolución:

En el ΔDAC: $\dfrac{1}{Sen20°} = \dfrac{\cancel{CD}}{Sen40°}$

En el ΔBDC : $\dfrac{\sqrt{3}}{Sen60°} = \dfrac{\cancel{CD}}{Senx}$

$\div$ $\dfrac{Sen60°}{\sqrt{3}Sen20°} = \dfrac{Senx}{Sen40°}$

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\cancel{Sen20°}Cos20° = \cancel{\sqrt{3}}\cancel{Sen20°} \times Senx$$

$$Cos20° = Senx$$

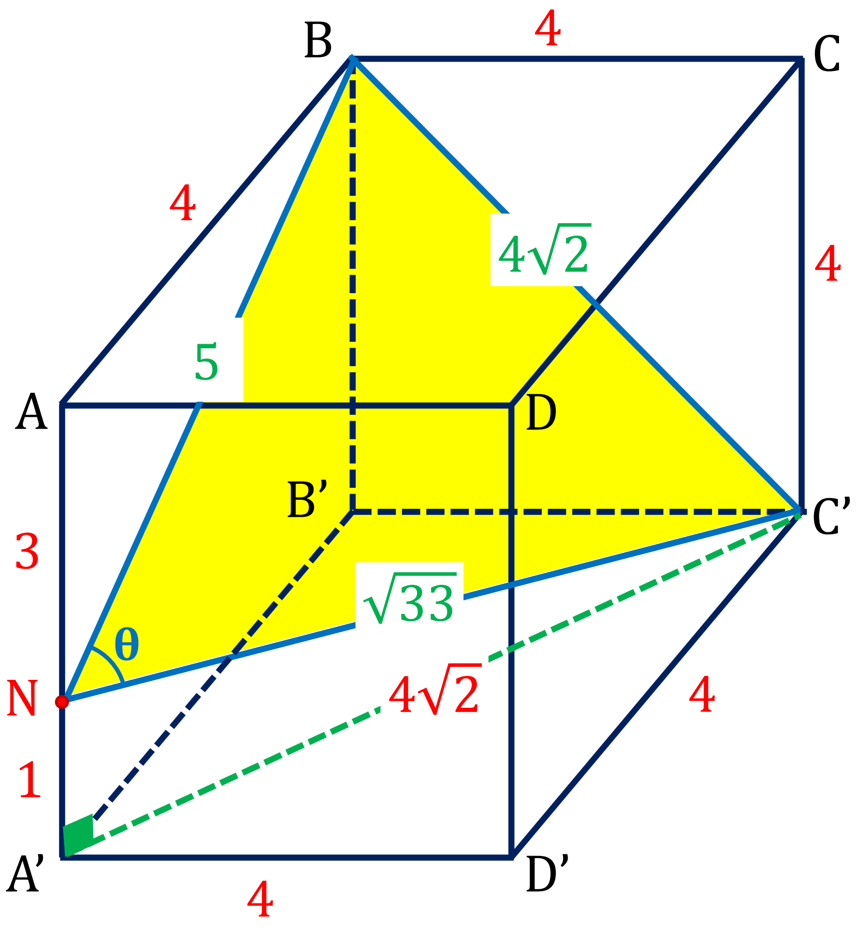
$$Sen70° = Senx$$

$$\therefore \mathbf{x = 70° \lor x = 110°}$$

CLAVE: C

10. En un cubo de vértices ABCDA’B’C’D’, en la arista AA’ se toma el punto N de modo que AN=3NA’. Si $\theta = m\measuredangle BNC'$ calcule: $\sqrt{33}\text{Cos}\theta$

Resolución:



En el $\Delta BNC'$:

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 + \left(\sqrt{33}\right)^2 - 2(5)\left(\sqrt{33}\right)\text{Cos}\theta$$

$$32 = 58 - 10\left(\sqrt{33}\right)\text{Cos}\theta$$

$$10\sqrt{33}\text{Cos}\theta = 26$$

$$\therefore \sqrt{33}\textbf{Cos}\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}$$

CLAVE: D

11. En un triángulo ABC de lados a, b y c la expresión: $E = \dfrac{2(b^2 - a^2)}{\text{CotA} - \text{CotB}}$ Es igual a:
S: área de la región triangular ABC.

Resolución:

$$E = \frac{2\left((2\text{RSenB})^2 - (2\text{RSenA})^2\right)}{\text{CotA} - \text{CotB}}$$

$$E = \frac{2 \times 4R^2(\text{Sen}^2\text{B} - \text{Sen}^2\text{A})}{\dfrac{\text{Sen}(\text{B} - \text{A})}{\text{SenBSenA}}}$$

$$E = \frac{2 \times 4R^2 \times \cancel{\text{Sen}(\text{B} - \text{A})}\text{Sen}(\text{B} + \text{A})\text{SenBSenA}}{\cancel{\text{Sen}(\text{B} - \text{A})}}$$

$$E = 4 \times \underbrace{2R^2\text{SenASenBSenC}}_{\text{S}}$$

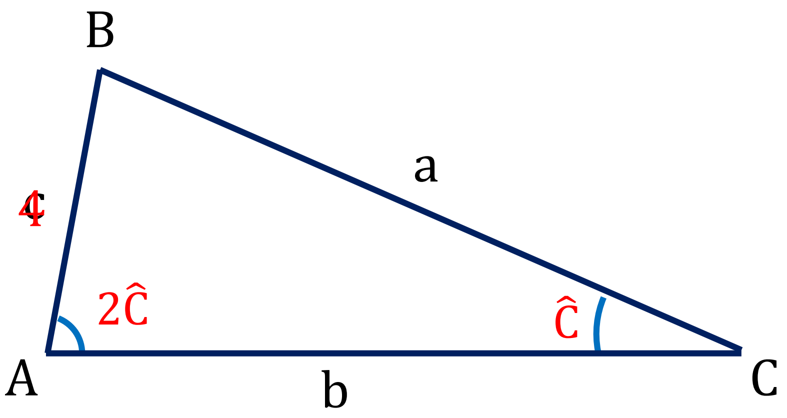
$$\therefore \mathbf{E = 4S}$$

CLAVE: D

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

12. En un ΔABC de lados a, b y c si $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C), \text{Cos}C = \dfrac{3}{4}; c = 4, \text{con}(b > c)$. Hallar la medida del lado a. (en cm)

Resolución:



En el ΔBAC: $\dfrac{a}{\text{Sen}2C} = \dfrac{4}{\text{Sen}C}$

$$4 \times 2\cancel{\text{Sen}C}\text{Cos}C = a\cancel{\text{Sen}C}$$

$$a = 8CosC$$

$$a = 8 \times \frac{3}{4}$$

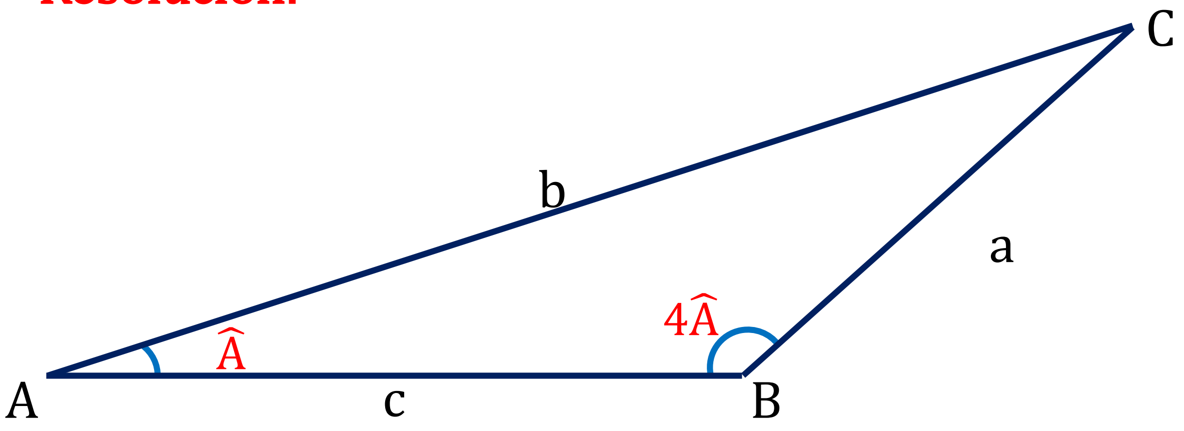
$$\therefore \mathbf{a = 6}$$

CLAVE: D

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

13. En un triángulo ABC de lados a, b y c si $m\sphericalangle B = 4(m\sphericalangle A)$, entonces: $\underbrace{\text{CosA} + \text{Cos3A}}_{\text{2Cos2ACosA}}$, es:

Resolución:



En el ΔBAC: $$\frac{a}{\text{SenA}} = \frac{b}{\text{Sen4A}}$$

$$a \times Sen4A = \text{bSenA}$$

$$a \times 2\text{Sen2A}.\text{Cos2A} = \text{bSenA}$$

$$a \times 2 \times 2\cancel{\text{SenA}}\text{CosACos2A} = \text{b}\cancel{\text{SenA}}$$

$$\therefore \mathbf{2CosACos2A} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$$

CLAVE: B

14. En un ΔABC de lados a, b y c cumple la relación: $\mathrm{aSenA} - \mathrm{bSenB} = \mathrm{cSenC}$. Luego el triángulo es:

Resolución:

$$\mathrm{aSenA} - \mathrm{bSenB} = \mathrm{cSenC}$$

$$a\left(\frac{a}{\cancel{2R}}\right) - b\left(\frac{b}{\cancel{2R}}\right) = c\left(\frac{c}{\cancel{2R}}\right)$$

$$a^2 - b^2 = c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$\therefore$ **Triángulo Rectángulo**

CLAVE: D

15. Con elementos de un triángulo ABC, simplificar: $E = b.c.\operatorname{Sen}(B+C)(\operatorname{Cot}B + \operatorname{Cot}C)$

Resolución:

$$E = b.c.\operatorname{Sen}(B+C)(\operatorname{Cot}B + \operatorname{Cot}C)$$

$$E = b.c.\operatorname{Sen}A\left(\frac{\operatorname{Sen}(B+C)}{\operatorname{Sen}B.\operatorname{Sen}C}\right)$$

$$E = 2R\cancel{\operatorname{Sen}B} \times 2R\cancel{\operatorname{Sen}C} \times \operatorname{Sen}A\left(\frac{\operatorname{Sen}A}{\cancel{\operatorname{Sen}B}.\cancel{\operatorname{Sen}C}}\right)$$

$$E = 4R^2 \times \operatorname{Sen}^2 A$$

$$E = 4R^2 \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2$$

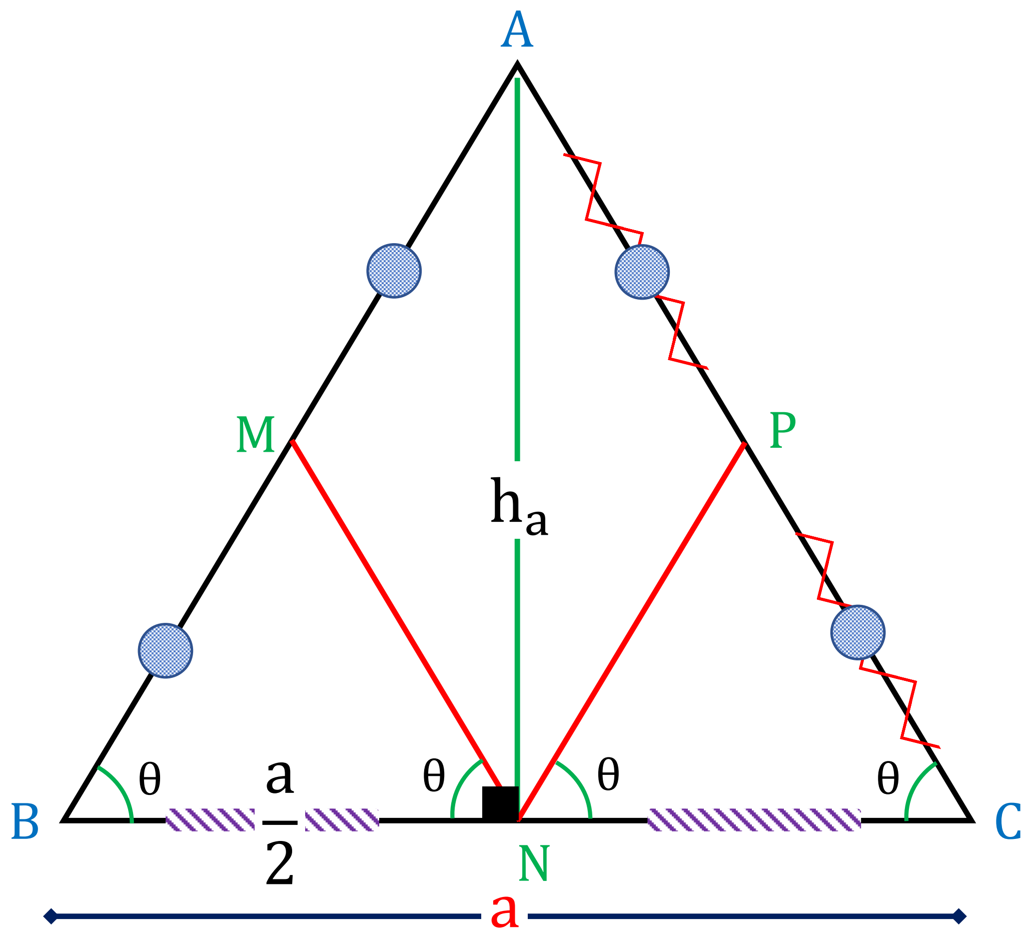
$$E = \cancel{4R^2} \times \frac{a^2}{\cancel{4R^2}}$$

$$\therefore \mathbf{E = a^2}$$

CLAVE: A

16. El área de la región triangular ABC es S, el lado BC tiene como longitud a y los ángulos MNB y CNP tienen la misma medida. Siendo M, N y P los puntos medios de los lados del triángulo ABC (N en BC y P en AC). Halle la tangente del ángulo ABC en términos de a y S (en u^2)

Resolución:



$$\text{Tan}\theta = ? \quad \rightarrow \quad \text{Tan}\theta = \frac{h_a}{\frac{a}{2}}$$

$$\text{y} \quad S = \frac{h_a . a}{2} \quad \rightarrow \quad h_a = \frac{2S}{a}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{a}{2}}$$

$$\therefore \ \mathbf{Tan\theta = \frac{4S}{a^2}}$$

CLAVE: A

17. En un ΔABC si; r, es el inradio

r_a, es el exradio relativo al lado A $\quad$ r_b, es el exradio relativo al lado B $\quad$ r_c, es el exradio relativo al lado C

$$E = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \text{ , es:}$$

Resolución:

$$r = 4R\,\mathrm{Sen}\frac{A}{2}\mathrm{Sen}\frac{B}{2}\mathrm{Sen}\frac{C}{2}$$

$$r_a = 4R\,\mathrm{Sen}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}$$

$$r_b = 4R\,\mathrm{Sen}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}$$

$$r_c = 4R\,\mathrm{Sen}\frac{C}{2}\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}$$

$\div$ $\quad$ $\div$ $\quad$ $\div$

$$\frac{r}{r_a} = \mathrm{Tan}\frac{B}{2}\mathrm{Tan}\frac{C}{2}$$

$$\frac{r}{r_b} = \mathrm{Tan}\frac{A}{2}\mathrm{Tan}\frac{C}{2}$$

$$\frac{r}{r_c} = \mathrm{Tan}\frac{A}{2}\mathrm{Tan}\frac{B}{2}$$

$+$

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \underbrace{\mathrm{Tan}\frac{B}{2}\mathrm{Tan}\frac{C}{2} + \mathrm{Tan}\frac{A}{2}\mathrm{Tan}\frac{C}{2} + \mathrm{Tan}\frac{A}{2}\mathrm{Tan}\frac{B}{2}}_{1}$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$$

$$r\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) = 1$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$\therefore$ **E = 0** $\qquad$ **CLAVE: C**

18. Al simplificar la expresión siguiente donde S es el valor del área de la región triangular ABC

$$E=\frac{b^2-c^2}{2}.\frac{\mathrm{SenB.SenC}}{\mathrm{Sen}(B-C)}$$

Se obtiene:

Resolución:

$$E=\frac{(2\mathrm{RSenB})^2-(2\mathrm{RSenC})^2}{2}\times\frac{\mathrm{SenB.SenC}}{\mathrm{Sen}(B-C)}$$

$$E=\frac{4R^2[\mathrm{Sen}^2B-\mathrm{Sen}^2C]}{2}\times\frac{\mathrm{SenB.SenC}}{\mathrm{Sen}(B-C)}$$

$$E=2R^2\mathrm{Sen}(B+C)\cancel{\mathrm{Sen}(B-C)}\times\frac{\mathrm{SenB.SenC}}{\cancel{\mathrm{Sen}(B-C)}}$$

$$E=2R^2\mathrm{SenA.SenB.SenC}$$

$\therefore \mathbf{E=\mathcal{S}}$

CLAVE: E

19. En un triángulo ABC de lados a, b y c si:

$$\begin{cases} r \rightarrow \text{inradio} \\ R \rightarrow \text{circunradio} \\ p \rightarrow \text{semiperimetro} \end{cases}$$

Hallar: $E = abc$

Resolución:

$$\frac{E}{4R} = \frac{abc}{4R}$$

$$\frac{E}{4R} = S$$

$$\frac{E}{4R} = pr$$

$$\therefore \mathbf{E = 4Rpr}$$

CLAVE: D

20. En un ΔABC de lados a, b y c donde ha es la altura relativa al lado A, si $a = h_a$ entonces: $E = \dfrac{\text{Sen}(B + C)}{\text{SenB}.\text{SenC}}$ Es:

Resolución:

$$a = h_a$$

$$\cancel{2}\text{RSenA} = \cancel{2}\text{RSenBSenC}$$

$$\text{SenA} = \text{SenBSenC}$$

$$E = \frac{\text{Sen}(180° - A)}{\text{SenB}.\text{SenC}}$$

$$E = \frac{\text{SenA}}{\text{SenA}}$$

$$\therefore \mathbf{E = 1}$$

CLAVE: C

MOMENTO DE PRACTICAR

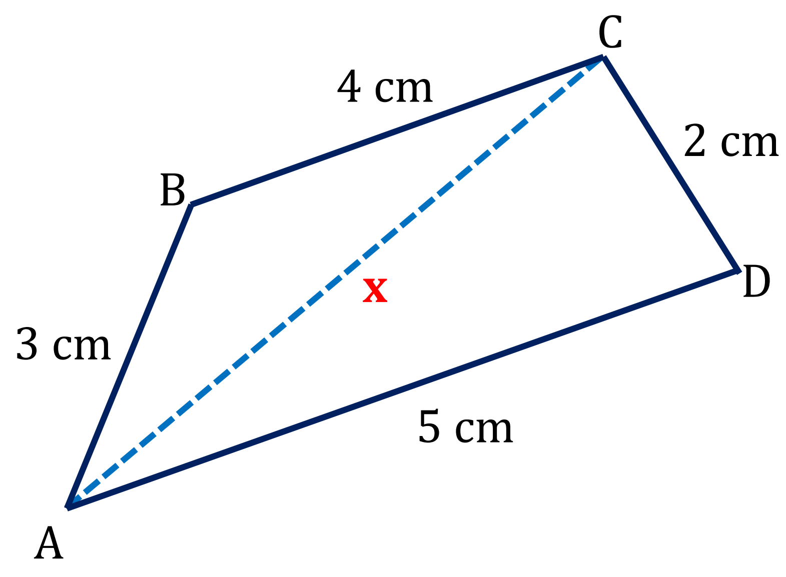
PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

UNI 2018 – II

Sea ABCD un cuadrilátero con AB=3cm, BC=4cm, CD=2cm y AD=5 cm Calcule el valor de: $E = \dfrac{1 + 6\text{Cos}B}{5\text{Cos}D}$

A) 1 B) 3/2 C) 2 D) 5/2 E)3

Resolución:



Aplicamos el Teorema de Cosenos

$$\Delta ABC:\ x^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\text{Cos}B$$
$$x^2 = 25 - 24\text{Cos}B \ldots (\text{I})$$

$$\Delta ADC:\ x^2 = 2^2 + 5^2 - 2(2)(5)\text{Cos}D$$
$$x^2 = 29 - 20\text{Cos}D \ldots (\text{II})$$

Igualamos (I) y (II)

$$25 - 24\text{Cos}B = 29 - 20\text{Cos}D$$
$$20\text{Cos}D = 24\text{Cos}B + 4$$
$$20\text{Cos}D = 4(1 + 6\text{Cos}B)$$
$$5\text{Cos}D = 1 + 6\text{Cos}B$$
$$1 = \frac{1 + 6\text{Cos}B}{5\text{Cos}D}$$

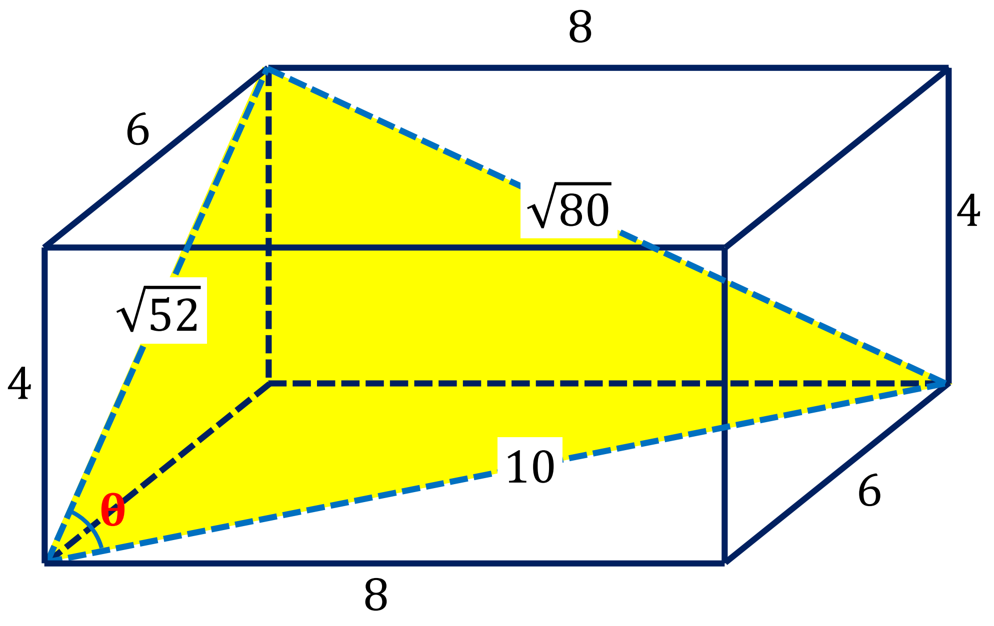
$$\therefore \mathbf{E = 1}$$

CLAVE: A

UNI 2016 – I

En el paralelepípedo rectangular de la figura, determine aproximadamente la medida del ángulo θ

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E)90°



Resolución:

Por el Teorema de Cosenos

$$(\sqrt{80})^2 = (\sqrt{52})^2 + 10^2 - 2(\sqrt{52})(10)\text{Cos}\theta$$

$$\cancel{80} = \cancel{152} - \cancel{20}(2\sqrt{13})\text{Cos}\theta$$

$$10 = 19 - 5\sqrt{13}\text{Cos}\theta$$

$$5\sqrt{13}\text{Cos}\theta = 9$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{9}{5\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{9\sqrt{13}}{65}$$

$$\text{Cos}\theta = 0{,}5$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta = 60°}$$

CLAVE: C

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

UNI 2015 – I

En todo triángulo ABC la suma de los cuadrados de sus lados es igual a $K(bcCosA + acCosB + abCosC)$ donde K vale:

A) 1/4 B) 1/2 C) 1 D) 2 E)4

Resolución:

$$a^2 + b^2 + c^2 = K(bcCosA + acCosB + abCosC)$$

Por el Teorema de Cosenos:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(bcCosA + acCosB + abCosC)$$

Reemplazamos:

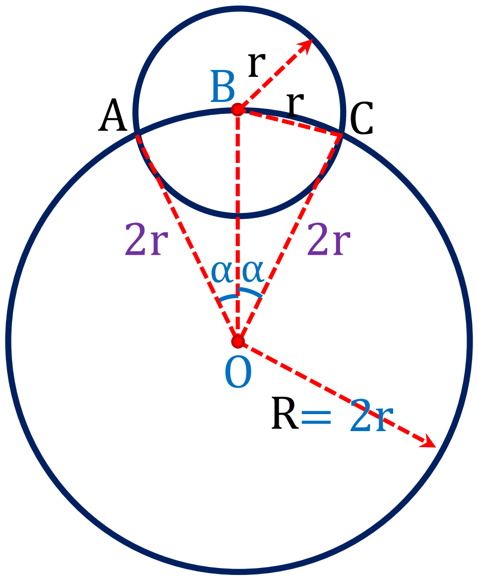
$$K\cancel{(bcCosA + acCosB + abCosC)} = 2\cancel{(bcCosA + acCosB + abCosC)}$$

$$\therefore \mathbf{K = 2}$$

CLAVE: D

UNI 2014 – II

Se tiene la siguiente figura formada por dos círculos de radio R y r $\left(r = \frac{R}{2}\right)$. Determine la longitud de arco de circunferencia $\widehat{AC}$



A) $2r.\text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

B) $2r.\text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$

C) $4r.\text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

D) $4r.\text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$

E) $6r.\text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

Resolución:

Del gráfico:

$$L_{\widehat{AC}} = 2\alpha \times R \longrightarrow L_{\widehat{AC}} = 4\alpha \times r \ \ldots \text{(I)}$$

En el ΔBOC por el Teorema de Cosenos:

$$r^2 = (2r)^2 + (2r)^2 - 2(2r)(2r)\text{Cos}\alpha$$

$$r^2 = 8r^2 - 8r^2\text{Cos}\alpha$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{7}{8} \qquad \text{Sen}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Entonces:

$$\alpha = \text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right) \ \ldots \text{(II)}$$

(II) en (I):

$$\therefore \mathbf{L_{\widehat{AC}} = 4r.\text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)}$$

CLAVE: D

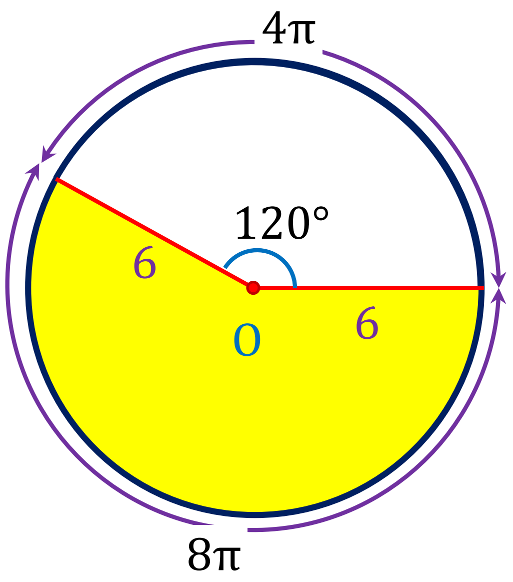
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

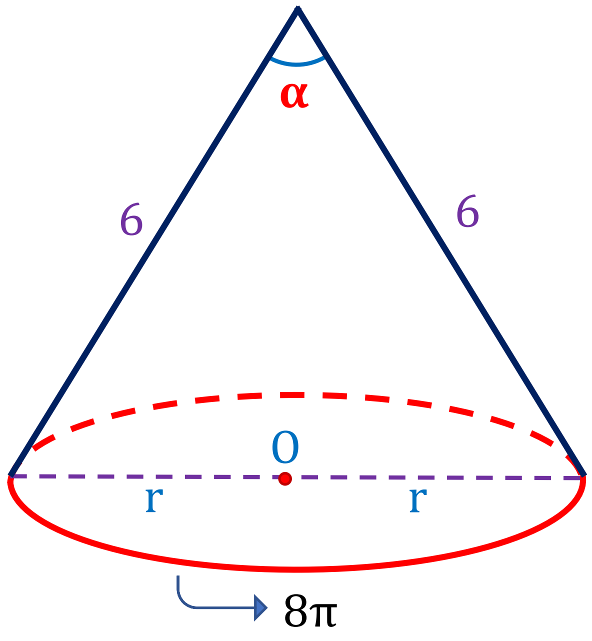
UNI 2014 – I

De un disco de cartulina de radio 6 cm, se corta un sector circular de ángulo central $\theta = 120°$. Con la parte restante, uniendo los bordes se forma un cono. Determine el coseno del ángulo en el vértice del cono construido.

A) 0 B) $\sqrt{2}/2$ C) $1/2$ D) $1/5$ E) $1/9$

Resolución:





Del cono formado se obtiene:

$$2\pi r = 8\pi$$
$$r = 4$$

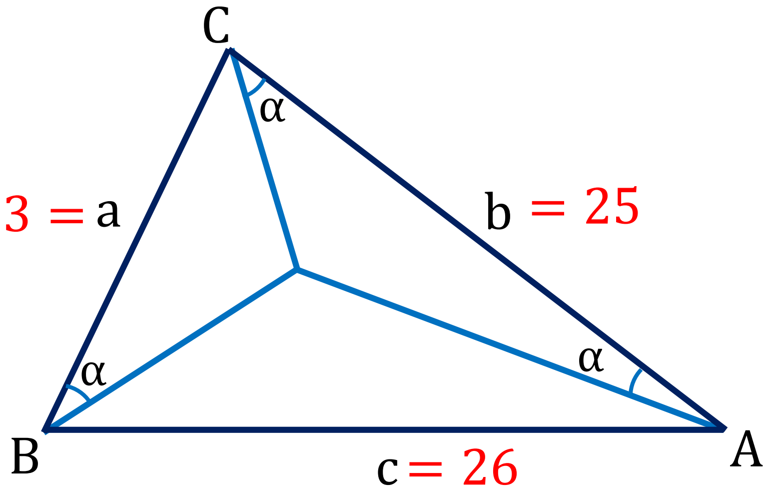
También:

$$(2r)^2 = 6^2 + 6^2 - 2(6)(6)\mathrm{Cos}\alpha$$
$$(8)^2 = 72 - 72\mathrm{Cos}\alpha$$
$$64 = 72 - 72\mathrm{Cos}\alpha$$
$$72\mathrm{Cos}\alpha = 8$$
$$\therefore \mathbf{Cos}\alpha = \frac{1}{9}$$

CLAVE: E

UNI 2013 – II

En la figura:



Si a=3 , b= 25 , c= 26 , $\text{Tan}\alpha = \frac{m}{n}$, donde m y n son primos entre si, calcule $m + n$

A) 727 B) 728 C) 729
D) 730 E) 731

Resolución:

Por el Teorema de Cosenos: $\text{CosA} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ... **(I)**

Por área de una región triangular(S): $S = \dfrac{bc}{2}\text{SenA}$

$\text{SenA} = \dfrac{2S}{bc}$ ... **(II)**

Dividimos (I) y (II): $\text{CotA} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Análogamente: $\text{CotB} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$ $\quad\text{CotC} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Aplicamos en el gráfico el punto de Brocard

$\text{Cot}\alpha = \text{CotA} + \text{CotB} + \text{CotC}$

$$\text{Cot}\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \qquad \text{Cot}\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$\text{Cot}\alpha = \frac{3^2 + 25^2 + 26^2}{4S} \qquad \text{Cot}\alpha = \frac{1310}{4S} \text{ ... } \textbf{(III)}$$

Aplicamos la formula de Herón para calcular el áre de la laregión triangular ABC

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$S = \sqrt{27(27-3)(27-25)(27-26)}$$

$$S = 36 \quad \ldots \mathbf{(IV)}$$

Reemplazamos (IV)en (III)

$$\mathrm{Cot}\alpha = \frac{1310}{4(36)}$$

$$\mathrm{Cot}\alpha = \frac{655}{72}$$

$$Tan\alpha = \frac{72}{655} \qquad \therefore \mathbf{m + n = 727}$$

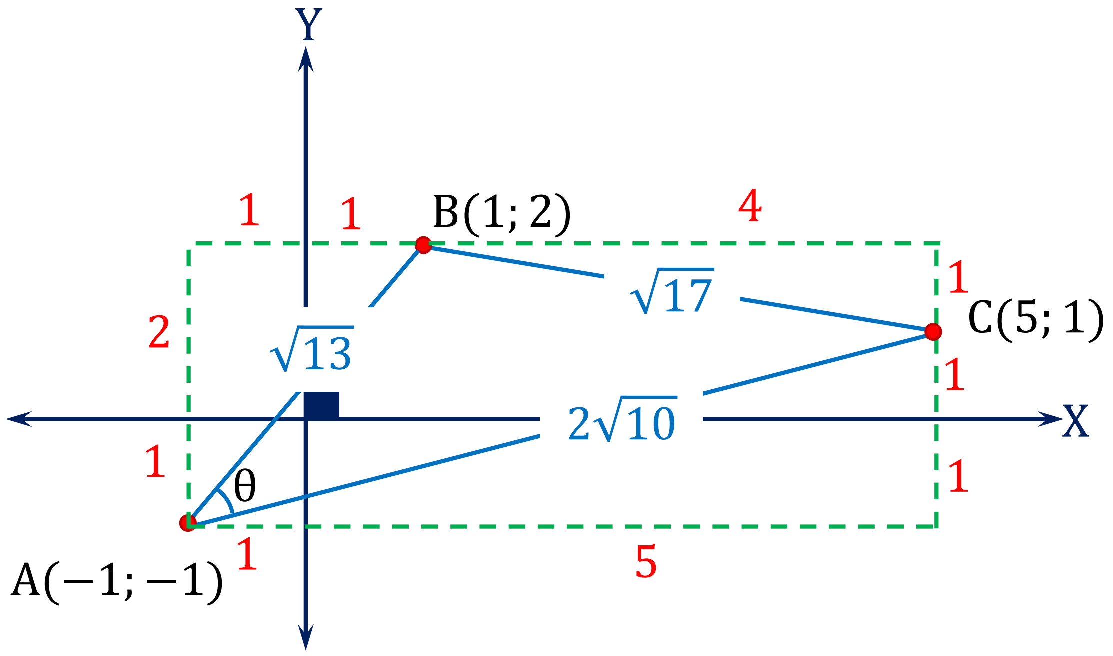
CLAVE: A

UNI 2013 – I

Los vértices de un triángulo son: $A(-1;-1), B(1;2)$ y $C(5;1)$ Entonces el Coseno del ángulo $B\widehat{A}C$ vale:

A) 0,789 B) 0,798 C) 0,879 D)0,897 E) 0,987

Resolución:



$$\text{Cos}\theta = \frac{\left(2\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2}{2\left(2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{13}\right)}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{40 + 13 - 17}{2\left(2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{13}\right)}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$\therefore$ **$\text{Cos}\theta = 0,789$** **CLAVE: A**

UNI 2011 – II

Si A,B y C son los ángulos de un triángulo 1,2 ; 2,3 y 3 son las longitudes de sus lados opuestos a dichos ángulos respectivamente y SenA = L , calcule el valor de la expresión siguiente:

$$D = \frac{\mathrm{Sen}(A+B) + \mathrm{Sen}(A+C) + \mathrm{Sen}(B+C)}{53\mathrm{Cos}A + 42\mathrm{Cos}B + 35\mathrm{Cos}C}$$

A) $\frac{L}{4}$ B) $\frac{L}{6}$ C) $\frac{L}{8}$ D) $\frac{L}{10}$ E) $\frac{L}{12}$

Resolución:

$$D = \frac{\mathrm{Sen}(180° - C) + \mathrm{Sen}(180° - B) + \mathrm{Sen}(180° - A)}{53\mathrm{Cos}A + 42\mathrm{Cos}B + 35\mathrm{Cos}C}$$

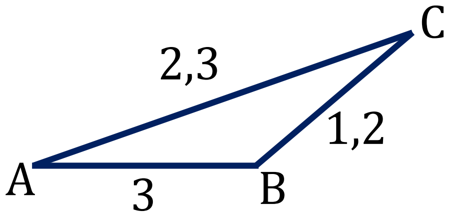
$$D = \frac{\mathrm{Sen}C + \mathrm{Sen}B + \mathrm{Sen}A}{53\mathrm{Cos}A + 42\mathrm{Cos}B + 35\mathrm{Cos}C}$$

Reemplazando:

$$D = \frac{\frac{\cancel{65}L}{12}}{\cancel{65}}$$

$$\therefore D = \frac{L}{12}$$

CLAVE: E



$$\frac{1,2}{\mathrm{Sen}A} = \frac{2,3}{\mathrm{Sen}B} = \frac{3}{\mathrm{Sen}C}$$

$$\frac{1,2 + 2,3 + 3}{\mathrm{Sen}A + \mathrm{Sen}B + \mathrm{Sen}C} = \frac{1,2}{\mathrm{Sen}A}$$

$$\frac{6,5}{\mathrm{Sen}A + \mathrm{Sen}B + \mathrm{Sen}C} = \frac{1,2}{L}$$

$$\mathrm{Sen}A + \mathrm{Sen}B + \mathrm{Sen}C = \frac{65L}{12}$$

$$1,2 = 3\mathrm{Cos}B + 2,3\mathrm{Cos}C$$
$$3 = 1,2\mathrm{Cos}B + 2,3\mathrm{Cos}A$$
$$2,3 = 3\mathrm{Cos}A + 1,2\mathrm{Cos}C$$

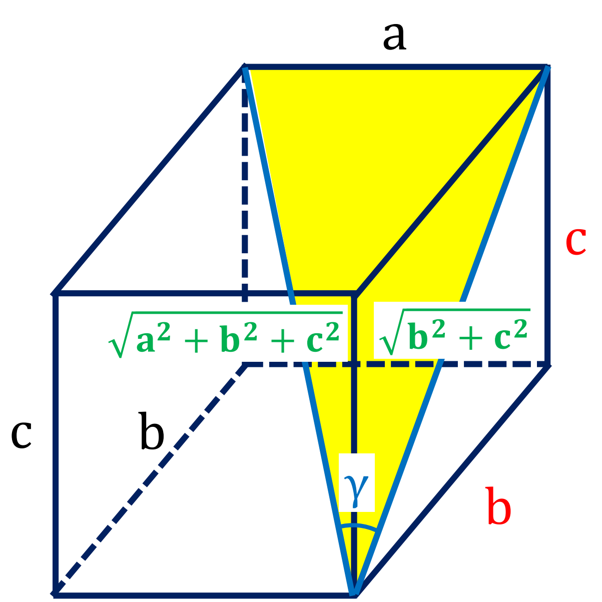
Sumando las 3 relaciones:

$$6,5 = 5,3\mathrm{Cos}A + 4,2\mathrm{Cos}B + 3,5\mathrm{Cos}C$$

$$65 = 53\mathrm{Cos}A + 42\mathrm{Cos}B + 35\mathrm{Cos}C$$

UNI 2010 – II

En la figura se muestra un paralelepípedo recto de lados a, b y c. Calcule el Seno Verso del ángulo γ, si: $\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{1}{3}$



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

Resolución:

Por el Teorema de Cosenos:

$$\mathrm{Cos}\gamma=\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)^2-a^2}{2\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma=\frac{2(b^2+c^2)}{2\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)}\times\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Vers}\gamma=1-\mathrm{Cos}\gamma$$

$$\mathrm{Vers}\gamma=1-\frac{1}{3}\qquad\therefore\ \mathbf{Vers}\gamma=\frac{2}{3}$$

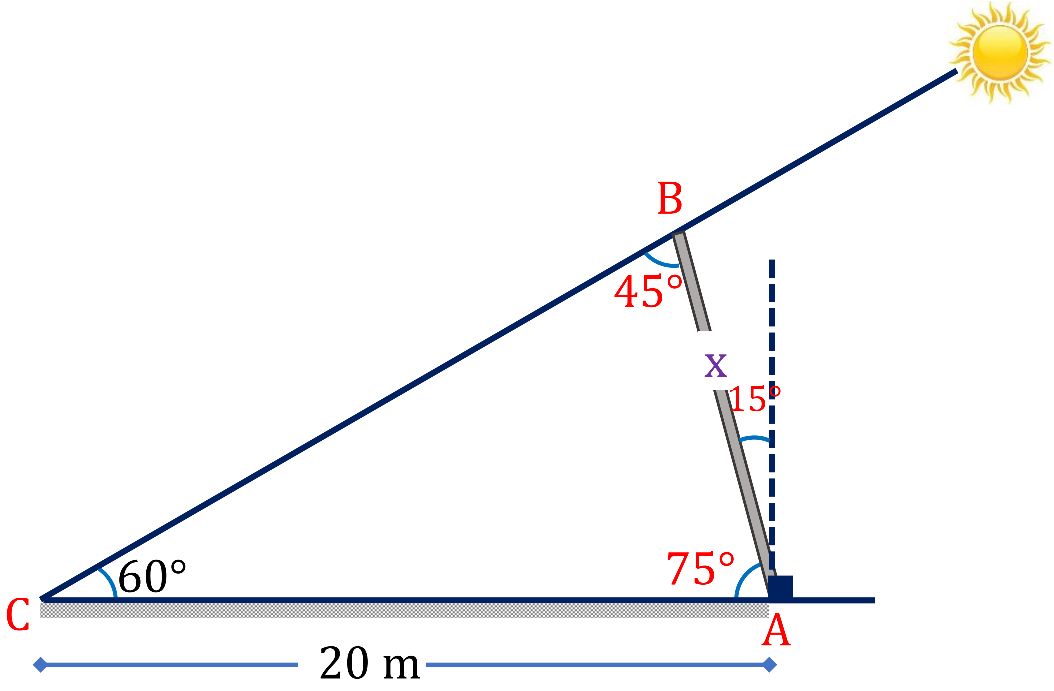
CLAVE: D

UNI 2010 – I

Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 60°, un poste inclinado en 15° desde la vertical proyecta una sombra de 20 m . Determine la longitud del poste.

A) 26,1 B) 25,5 C) 24,5 D) 23,2 E) 22,5

Resolución:



En el Δ ABC:

$$\frac{x}{\text{Sen}60°} = \frac{20}{\text{Sen}45°}$$

$$x = \frac{20\text{Sen}60°}{\text{Sen}45°}$$

$$x = \frac{20\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$x = 10\sqrt{6}$$

$$\therefore \mathbf{x = 24,49\ m}$$

CLAVE: C

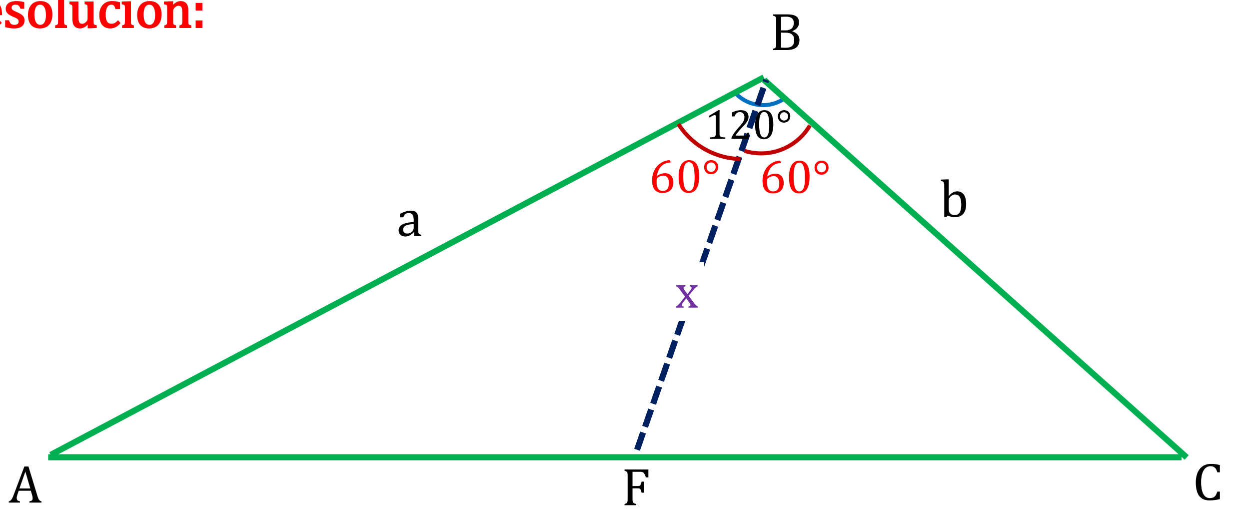
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

UNI 2009 – II

En un triángulo ABC se tiene AB=a , BC= b y $m\sphericalangle ABC = 120°$.Calcule la longitud de la bisectriz interna $\overline{BF}$, $F \in \overline{AC}$

A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$ D) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$ E) $\frac{2ab\sqrt{3}}{a+b}$

Resolución:



$$x = \frac{2ab}{a+b} \times \text{Cos}60°$$

$$x = \frac{\cancel{2}ab}{a+b} \times \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{ab}{a+b}}$$

CLAVE: A

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS